SEQUÊNCIA DE ENSINO

SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES POR MEIO DA ESTRATÉGIA DE UM CURRÍCULO EM ESPIRAL NUMA ABORDAGEM MATEMÁTICA INVESTIGATIVA

JOSEFA MARIA DA SILVA

UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI – URCA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGP
CENTRO DE EDUCAÇÃO - CE
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO – MPEDU

AUTORA: JOSEFA MARIA DA SILVA

COLABORADOR: DR. CLAUDIO REJANE DA SILVA DANTAS

SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE FUNÇÃO POR MEIO DA ESTRATÉGIA DE UM CURRÍCULO EM ESPIRAL NUMA ABORDAGEM MATEMÁTICA INVESTIGATIVA

LINHA DE PESQUISA: FORMAÇÃO DE PROFESSORES, CURRÍCULO E ENSINO.

SUBLINHA DE PESQUISA: FORMAÇÃO DE PROFESSORES: ENSINO E SUAS METODOLOGIAS

CRATO - 2021

PRODUTO EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE FUNÇÃO POR MEIO DA ESTRATÉGIA DE UM CURRÍCULO EM ESPIRAL NUMA ABORDAGEM MATEMÁTICA INVESTIGATIVA

AUTORA

JOSEFA MARIA DA SILVA

COLABORADOR

DR. CLAUDIO REJANE DA SILVA DANTAS

CAPA, ILUSTRAÇÃO E DIAGRAMAÇÃO
JOSEFA MARIA DA SILVA

FOTOGRAFIA
JOSEFA MARIA DA SILVA

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri – URCA
Bibliotecária: Ana Paula Saraiva de Sousa CRB 3/1000

Silva, Josefa Maria da.
S586s Sequência de ensino para o estudo de função por meio da estratégia de um currículo em espiral numa abordagem matemática investigativa / Josefa Maria da Silva com colaboração de Claudio Rejane da Silva Dantas. – Crato-CE, 2021
92p.; il.

Produto educacional vinculado à dissertação "Estudo de função por meio da estratégia de um currículo em espiral numa abordagem matemática investigativa."

1. Sequência de ensino, 2. Matemática investigativa, 3. Currículo espiral, 4. Produto educacional; I. Título.

CDD: 371.3

AGRADECIMENTOS

À Deus pelo dom da vida, sabedoria e a graça de poder fazer parte desse Universo; pelo brilho de cada amanhecer e as oportunidades de conhecimento, de poder colaborar diretamente ou indiretamente no crescimento intelectual e humano de outras pessoas; pela força que me motiva a viver intensamente e ver no outro a importância de ser movido por essa energia positiva e infinita.

Ao professor orientador, Dr. Claudio Rejane da Silva Dantas, pelo apoio, encorajamento e suas valiosas contribuições para elaboração e concretização desse gracioso trabalho de pesquisa científica.

Aos meus familiares: Adeildo, Elias, Enoque e Rosineide, pelo apoio, compreensão, incentivo e orações.

Aos amigos que contribuíram de forma direta ou indireta com palavras nobres de carinho, apoio, estímulo e encorajamento, corroborando no caminhar intelectual, científico e vivencial.

Ao Comando do 2º Colégio da Polícia Militar Coronel Hervano Macêdo Júnior e a equipe pedagógica, bem como aos estudantes da referida Instituição pela participação.

Meus sinceros agradecimentos!!!

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

É com satisfação que apresentamos aos docentes e discentes o material desenvolvido a partir da proposta de pesquisa: “Sequência de ensino para o estudo de Função por meio da estratégia de um currículo em espiral numa abordagem matemática investigativa”, tendo como objetivo principal “Analisar uma sequência de ensino para apoiar o estudo de Funções, sustentada pela Teoria de Bruner por meio do ensino por descoberta e em espiral, em direção a uma perspectiva investigativa”.

Nesse enfoque, Bruner (1999, p. 70–71) afirma que a sequência de ensino conduz o estudante à exploração de alternativas e suas implicações, por meio das “[...] afirmações e reafirmações de um problema ou corpo de conhecimentos que aumenta a sua capacidade de perceber, transformar e transferir o que está a aprender”. Para o autor (1999), a sequência de ensino é uma ótima alternativa para aprender, explorar os conteúdos, estimular a aprendizagem e ativar o desenvolvimento lógico-dedutivo-reflexivo, visando a aprendizagem e respeitando a natureza cognitiva de cada sujeito envolvido no processo.

É importante frisarmos que a Sequência de Ensino apresentada neste Produto Educacional é resultado de um trabalho de pesquisa vinculado ao Mestrado em Educação pela Universidade Regional do Cariri - URCA. Assim, deixamos a nossa contribuição social e cultural para a Educação Matemática, de maneira que se possa apoiar os docentes na arte de ensinar Funções por meio da abordagem investigativa, encorajando os estudantes a participarem do processo de aprendizagem num formato dinâmico e dialógico.

Desse modo, a proposta foi pautada na Teoria da Instrução de Jerome Bruner, com vista no ensino por descoberta numa abordagem investigativa, contemplando, assim, a produção de uma estratégia pedagógica com o intuito de inovar o contexto escolar e favorecer alternativas para enfrentamento dos desafios encontrados no ensino da matemática para o estudo de Funções, resultando num Produto Educacional.

No que tange a estratégia pedagógica, refere-se a uma ação pedagógica, delineada pela construção da sequência de ensino para o estudo de Funções, desencadeando elementos essenciais para a estruturação e evolução do processo de aprendizagem, tendo em vista a participação, diálogo, cooperatividade, curiosidade, criatividade, descoberta, interatividade, estímulo, investigação e desenvolvimento de novas habilidades. Na visão de Pimenta e Franco (2014, p. 119), a ação pedagógica é estruturada a partir das questões vivenciadas na sala de aula, em que visa superá-las por meio do delineamento de atividades, intervindo no processo de aprendizagem e transformando a realidade. Assim, a ação pedagógica sucedeu-se numa sequência de ensino, articulando a teoria com a prática, modelada por saberes, experiências e vivências.

Reiteramos que, a abordagem feita acerca de Funções, estabeleceu-se por procedimentos e ferramentas, tais como: textos matemáticos, resolução de problemas, materiais lúdicos, uso da tecnologia e explanação da temática abordada, de forma que corroboram para os enfrentamentos dos problemas analíticos, interpretativos, argumentativos e conjecturais, aproximando a linguagem matemática da linguagem do estudante, favorecendo o entendimento e possibilitando a familiarização do conteúdo com o cotidiano.

Desse modo, a estratégia de ensino se estruturou a partir das perguntas norteadoras, as quais impulsionaram o processo de pesquisa e a elaboração das ações investigativas, tais como:

1. Quais são os saberes e experiências sobre funções utilizados pelos estudantes em situações do cotidiano, que têm implicações no processo de aprendizagem?
2. Quais são os desafios decorrentes, no contexto escolar dos estudantes, para a compreensão do estudo de funções, com vista numa aprendizagem participativa, dialógica e com significados para formação humana?
3. De que forma uma sequência de ensino, poderá auxiliar na aprendizagem dos estudantes sobre o estudo de funções, modelado pela investigação para o processo de ensino por descoberta?
4. Como viabilizar o acesso dos professores e estudantes, às atividades da sequência de ensino, acerca de funções construídas, a partir do resultado da pesquisa?

Com base nesses questionamentos, enumeramos os seguintes objetivos específicos:

1. Identificar os saberes dos estudantes acerca de Funções, por meio de conceitos alternativos no contexto matemático, relacionados com situações do cotidiano.

2. Elaborar atividades que integrem o diálogo da matemática com a realidade do estudante, para a promoção de novos saberes e conhecimentos, visando a aprendizagem com significado, para a formação de ser no mundo.
3. Desenvolver uma sequência de ensino para apoiar o estudo de Funções, embasada no ensino por descoberta, por meio de um currículo em espiral com caráter investigativo.
4. Elaborar como produto educacional, uma revista pedagógica, apresentando a sequência de ensino para o estudo de Funções, com a abordagem didática do ensino investigativo por descoberta.

Então, a partir dessas proposições, escrevemos uma sequência de ensino para o estudo de Funções, respondendo não somente aos requisitos propostos, mas, propondo alternativas para ampliação de novos saberes, gerando sentido e significado, tanto no contexto escolar quanto no contexto vivencial. Para essa abordagem investigativa de cultura e conhecimento matemático utilizamos várias ferramentas, como: a tecnologia, ludicidade, alegoria, texto e elaboração de atividades compartilhadas e coletivas.

Enfim, a dinâmica utilizada desencadeou novas especulações, questionamentos, acessibilidades, harmonia, encantamento e significado, configurando-se num processo interativo e participativo, apontando para o desenvolvimento sociocultural, pensamento crítico, trabalho coletivo, respeito mútuo e novas formas de compreensão, pensar e agir.

1. CONCEPÇÕES TEÓRICAS

A nossa proposta de trabalho está fundamenta na concepção teórica de Jerome Bruner, ensino investigativo por descoberta, currículo em espiral e nas experiências vivenciais da sala de aula acerca do processo de aprendizagem, tendo em vista o Estudo de Funções; por apresentar um vasto campo de aplicabilidade, mas, o desafio é levar o estudante a entender a conexão da temática abordada com o cotidiano e encorajá-lo a interpretar, argumentar e resolver situações cotidianas sob diferentes ângulos, com o intuito de promover a aprendizagem com significado.

1.1 CONTRIBUIÇÃO DA TEORIA DA INSTRUÇÃO DE BRUNER PARA O PROCESSO DE APRENDIZAGEM NA MATEMÁTICA

A Teoria da Instrução proposta por Bruner está estruturada no formato de um currículo em espiral e no ensino por descoberta, configurando-se no ensino com significado, na exploração de novas alternativas e construção de novas ideias. Para o autor (2008, p. 92), a descoberta "[...] auxilia a criança a aprender uma variedade de formas para resolver problemas e transformar a informação para melhor utilização, ou seja, ajuda a lidar com a tarefa de aprender".

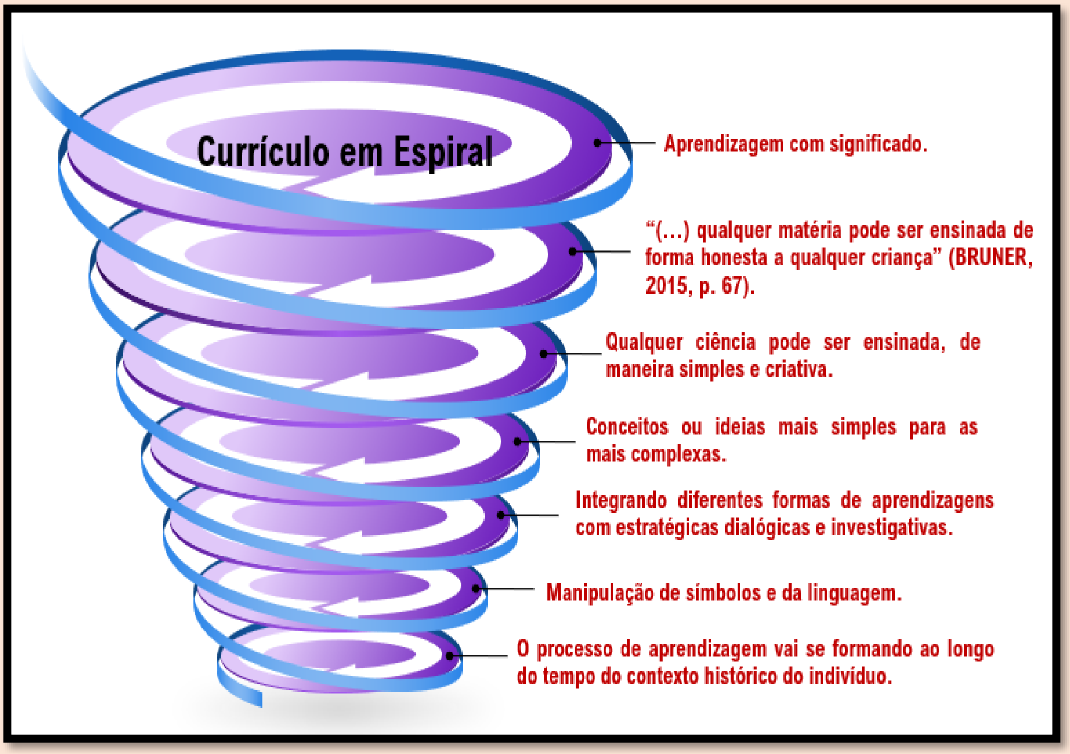
Assim, interpretamos que, o ensino por descoberta na aula de matemática propõe uma aprendizagem ativa, manipulativa e estimuladora, despertando no estudante o interesse de descobrir por natureza própria, encorajadas pela curiosidade e pela linguagem enigmática das relações matemáticas estruturais com as práticas do cotidiano. Bruner (2008, p. 103), ressalva "[...] que a descoberta em matemática é um coproduto do ato de tornar as coisas mais simples". Ressaltamos aqui, a importância do papel do professor como articulador desse processo de conhecimento.

Em relação ao currículo em espiral, Bruner (2015) destaca que qualquer ciência pode ser ensinada de forma simples e criativa, ou seja, partindo de conceitos ou ideias mais simples para as mais complexas, e que, qualquer conteúdo pode ser ensinado de forma honesta ao estudante, desde que respeite as suas formas pensantes e suas fases cognitivas. Com base nesse comentário, destacamos a fala de Bruner (2008, p. 109 – 110) afirmando que:

> [...] um currículo espiral, no qual as ideias são apresentadas primeiramente de forma e linguagem honesta, embora imprecisa, que pode ser entendida por crianças, ideias que podem ser posteriormente revisitadas com grande precisão e potência, até que finalmente o estudante alcance a recompensa do domínio. [...] o conteúdo pode ser ensinado a quaisquer indivíduos, em qualquer idade de forma justa.

Com base na concepção de Bruner, apresentamos a figura 1, um esquema explicativo com as implicações do currículo em espiral para o processo de aprendizagem.

Figura 1 – Esquema explicativo do currículo em espiral para o processo de aprendizagem



Fonte: elaborada pela autora (2021).

Desse modo, o currículo em espiral possibilita a integração dos estudantes no campo do conhecimento, propondo a revisitação dos conteúdos já vistos e incorporando novos conhecimentos numa configuração mais complexa; a descoberta propõe diferentes interpretações, leituras, curiosidades, formas diversificadas para a resolução de problemas e auxilia no desenvolvimento de novas habilidades.

1.2 ENSINO POR DESCOBERTA NUMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

O processo de investigação dentro da sala de aula revitaliza o aprendizado, estimula o estudante a participar da produção científica e a perceber o mundo em sua volta, favorecendo-o na tomada de decisões e na ampliação do olhar intelectual e vivencial, permitindo a atuação no mundo das transformações.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2017, p. 463), cabe à escola apresentar o mundo aos estudantes como um "[...] campo aberto para investigação e intervenção quanto aos aspectos sociais, produtivos, ambientais e culturais". Desse modo, ressignifica aprendizagem, produz e transforma a cultura, modifica a natureza da realidade social, relaciona a teoria com a prática e se reproduz em diversos contextos.

Ao envolver a sala de aula num cenário investigativo, os discentes tendem a compreender e aprender a lidar com os conteúdos matemáticos, pois, este tipo de ação apresenta um campo fecundo para a exploração de novos episódios, intensificando-se por meio da linguagem, informação, cultura tecnológica, por vivências e experiências socioculturais. Para Borba et. al (2018) a sala de aula é um ambiente rico em experimento para investigação por apresentar uma diversidade cultural de saberes. Nesse sentido, Alrø e Skovsmose (2010, p. 113), declamam que, o diálogo promove coletivamente a investigação, uma vez que, estimula os estudantes a expressarem suas ideias e entendimentos acerca do objeto em estudo.

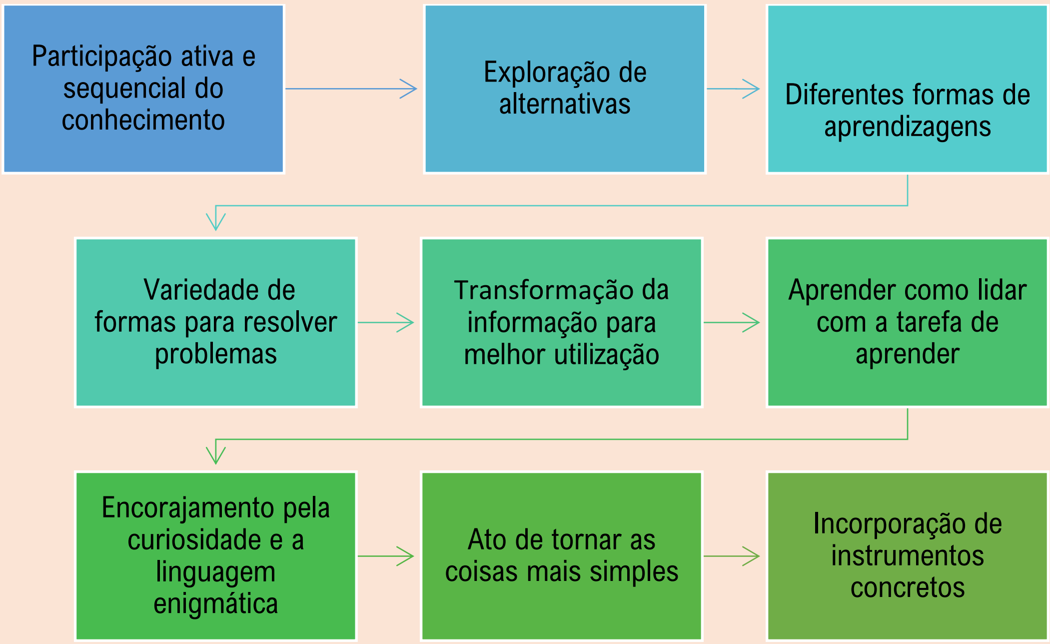
No que tange a descoberta Bruner (2008, p. 92) menciona que "[...] dentro do processo de aprendizado há, precisamente, o efeito de elevar o aprendiz a ser um construcionista [...]", auxiliando o discente "[...] a aprender uma variedade de formas para resolver problemas e transformar a informação para melhor utilização, ou seja, ajuda a aprender como lidar com a tarefa de aprender".

Desse modo, a investigação matemática, "[...] como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, construindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa" (PONTE; BROCARDO;

OLIVEIRA, 2013, p. 23). Conforme os autores (2013), o estudante é incentivado a agir como pesquisador e matemático, atuando na formulação e reformulação de problemas, revendo conjecturas, escrevendo observações, apresentando resultados, construindo argumentos e realizando discussões, colocando-o como sujeito central no processo de aprendizagem As atividades investigativas realizadas na sala de aula estabelecem uma conexão da matemática com outros conteúdos não matemáticos, levando o estudante a refletir acerca do contexto que está inserido, possibilitando a exploração de diferentes alternativas de conhecimentos e significados. Desse modo, um dos aspectos mais importantes da investigação é o envolvimento ativo do discente no processo de aprendizagem, mobilizando "[...] os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 23). Esse tipo de atividade integra professor e estudante num ambiente de aprendizagem dialógico, cooperativo e participativo.

Para elucidar o ensino por descoberta numa abordagem investigativa, pontuamos uma corrente de estratégias que vão sendo desenvolvidas a partir das atividades aplicadas na sala de aula, como podemos ver na figura 2.

Figura 2 – Estratégias desenvolvidas no ensino por descoberta com a abordagem investigativa



Fonte: elaborada pela autora (2021).

Portanto, a investigação realizada no contexto da sala de aula explora e revela diferentes concepções e posicionamentos para a obtenção do conhecimento, privilegiando o diálogo “[...] como um processo colaborativo de construção e perspectivas” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 127). Com base nesse enfoque, os autores (2010, p. 127) mencionam o “[...] diálogo como um processo de descoberta e aprendizagem [...]”, sendo dessa forma, um revelador de novos conhecimentos.

1.3 CONHECIMENTO MATEMÁTICO NUMA VISÃO DIALÓGICA E CONSTRUTIVA

Nos caminhos para o desenvolvimento do conhecimento, a matemática se conecta com o mundo das informações, englobando-se em vários contextos. Esta, por sua vez, apresenta um papel preponderante na vida das pessoas, atuando nos contextos sociais, econômicos, políticos, culturais, tecnológicos e científicos.

Assim, os propósitos do ensino da Matemática deve ser de integrar os sujeitos num campo dialógico, reflexivo, analítico e construtivo, colaborando com o conhecimento de novas culturas e o desenvolvimento de habilidades para atuar criticamente na resolução de problemas.

A matemática não pode ser ensinada como uma ciência pronta e acabada, mas como uma ciência exata em movimento, que se manifesta por meio de vários contextos e que se renova nas abordagens do cotidiano. Desse modo, o desenvolvimento do conhecimento matemático é fruto da ação humana ao longo da história.

Por isso, o processo de ensino e aprendizagem da matemática deve estar articulado com a realidade, oportunizando aos estudantes diferentes visões de mundo, potencializando novas formas de comunicação e significados.

Com base nessas referências, D’Ambrosio (2012, p.16) salienta que, o “[...] conhecimento é resultado de um longo processo acumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e difusão, elementos naturalmente não contraditórios entre si e que influenciam uns aos outros”. Na visão de Mizukami (2019, p. 93), “O homem se constrói e chega a ser sujeito na medida em que, integrado em seu contexto, reflete sobre ele e com ele se compromete, tomando consciência de sua historicidade".

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2017), o processo de ensino e aprendizagem da matemática deve desenvolver e mobilizar habilidades nos estudantes que servirão para resolver problemas ao longo da vida, promovendo nesse sentido, aprendizagem comprometida como o desenvolvimento intelectual e humano.

Desse modo, a dialogicidade matemática é o caminho para a aprendizagem crítica, em que o sujeito se reconhece como ser aprendente, pensante e transformador de sua realidade (FREIRE, 2005). Com vista nesta preposição, Bruner (2006, p. 98) pontua que, "[...] onde quer que o homem viva, ele é obrigado a gerenciar não somente a sobrevivência e a criação, mas também pensar e expressar seus pensamentos", por meio de sua "[...] narrativa".

Na concepção de Skovsmose (2014), a Matemática se idealiza por meio da construção crítica embasada em princípios dialógicos e substanciada em diferentes contextos. Assim, a comunicação e a investigação na sala de aula inserem o estudante no mundo das informações e estimula a descoberta.

Portanto, os conhecimentos e saberes vivenciados pelos estudantes no cotidiano promovem significados e contribuem para a construção de diferentes saberes, colocando-os no centro do processo de aprendizagem, além de favorecer o protagonismo e a ampliação da visão de mundo com novas interpretações.

2. PERCURSOS METODOLÓGICOS: AÇÃO PEDAGÓGICA NUMA PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

Com base na complexidade e nos desafios encontrados na sala de aula em relação a aprendizagem, o trabalho do docente precisa se revestir de novas práticas, conduzindo-se a novas reflexões acerca da práxis cotidiana. Esse sentimento impulsiona o educador a inserir no seu contexto educativo novas formas de trabalho, com o intuito de intervir e transformar a realidade. De acordo com Oliveira (2013, p. 35), "A prática docente está associada ao ensinar, ao transmitir e facilitar a produção de conhecimentos e saberes [...]". Já "[...] a prática pedagógica, também chamada de práxis, está intimamente relacionada com os aspectos sociais que perpassam todo o processo ensino-aprendizagem". Conforme a autora (2013, p. 35–36), a práxis pedagógica é

> [...] bastante abrangente, pois além de implicar a relação professor-aluno deve ultrapassar a concepção reducionista de ensino-aprendizagem e ir além da relação do conteúdo programático (currículo), para estabelecer relações com os aspectos sociais visando a construção de novos conhecimentos.

Assim, a proposta metodológica discorreu sob uma ação pedagógica, integrada à produção do conhecimento em função do cotidiano, com o objetivo de atingir melhorias na situação investigada, buscando assim, a "[...] superação de situações ou problemas práticos num processo espiral reflexivo" (PIMENTA; FRANCO, 2014, p. 116). De acordo com essas autoras (2014), esse tipo de ação, amplia a compreensão, organização e desenvolvimento de estratégias, visando a transformação ou a modificação da prática, como resposta aos problemas vivenciados na aprendizagem dos estudantes, estabelecendo uma reflexão sistematizada. Para Zabala (1998, p. 43), as ações são um conjunto de procedimentos dirigidos por objetivos, que redimensionam a organização do planejamento escolar, precedida por diferentes estratégias, possibilitando a apresentação de um conteúdo de forma heurística, zelando pela aprendizagem.

Para trilhar os caminhos pedagógicos procuramos articular o conhecimento experiencial com o conhecimento escolar, utilizando estratégias que permitissem fazer esse intercâmbio, possibilitando a socialização de saberes. Com base nesse pensamento, Oliveira (2013, p. 53) evidencia que:

> O ensinar e o aprender implicam uma relação entre o sujeito que se propõe a trabalhar e socializar *saberes* e alguém que está *aberto a ouvir e aprender* novos saberes para aprofundar conhecimentos já existentes. No âmbito da sala de aula, para que de fato se possa socializar e produzir novos conhecimentos e saberes, é necessário um planejamento que implique na realização de atividades para tornar as aulas mais dinâmicas e produtivas.

Com base nessa proposição, a ação pedagógica se constituiu a partir do planejamento de atividades com implicações no processo de aprendizagem, a fim de superar os desafios que percorrem a aprendizagem, iluminando novas alternativas para os conhecimentos, por meio da elaboração e da utilização de ferramentas pedagógicas, descodificando e clarificando as operacionalidades do significado da temática em estudo, propondo dessa forma, a abertura de diferentes caminhos para uma nova perspectiva de aprendizagem. Conforme Libâneo (2013, p. 245 – 246), "O planejamento é um meio para programar as ações docentes [...]", sendo, portanto, "[...] um processo de racionalização, organização e coordenação da ação docente, articulando a atividade escolar e a problemática do contexto social".

Assim, a importância fundamental desse tipo de atividade é contribuir para elevação da qualidade do processo de ensino e aprendizagem, favorecendo o engajamento do discente no espaço escolar, por meio da participação, colaboração, curiosidade e respeito, e, desenvolvimento do espírito crítico, ampliação e potencialização de novas habilidades.

2.1 SEQUÊNCIA DE ENSINO: UMA ESTRATÉGIA PARA A APRENDIZAGEM NUMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA POR DESCOBERTA

O ensino por descoberta é uma estratégia para trabalhar a Matemática com dinamismo, leveza, sensibilidade e com espiritualidade aventureira. Assim, a riqueza de uma sequência de ensino está na criatividade, linguagem do cotidiano e nos desafios da descoberta, pois, descobrir é permitir que a imaginação possa povoar o universo da criatividade e sobrevoar a aquarela do conhecimento.

Desse modo, a sequência de ensino é uma construção cooperativa do conhecimento com embasamento na natureza territorial e vivencial do estudante, substanciada pelo ato de ler, escrever e construir, com vista à "[...] "leitura" da realidade, centrada na compreensão crítica da prática social" (FREIRE, 2011, p. 194).

Neste ponto, a sequência de ensino expressa uma mensagem contextualizada, semeada por valores fundamentais para a construção de novos valores e novos conhecimentos, recheada de significados para o desenvolvimento intelectual e humano, num contexto imerso de mudanças sociais, culturais, científicas e tecnológicas. Conforme a BNCC (BRASIL,2017), a contextualização dos conteúdos é uma forma de conectar e tornar o processo de ensino e aprendizagem significante na vida dos estudantes, com fundamentação na realidade do lugar e do tempo em que estes estão situados.

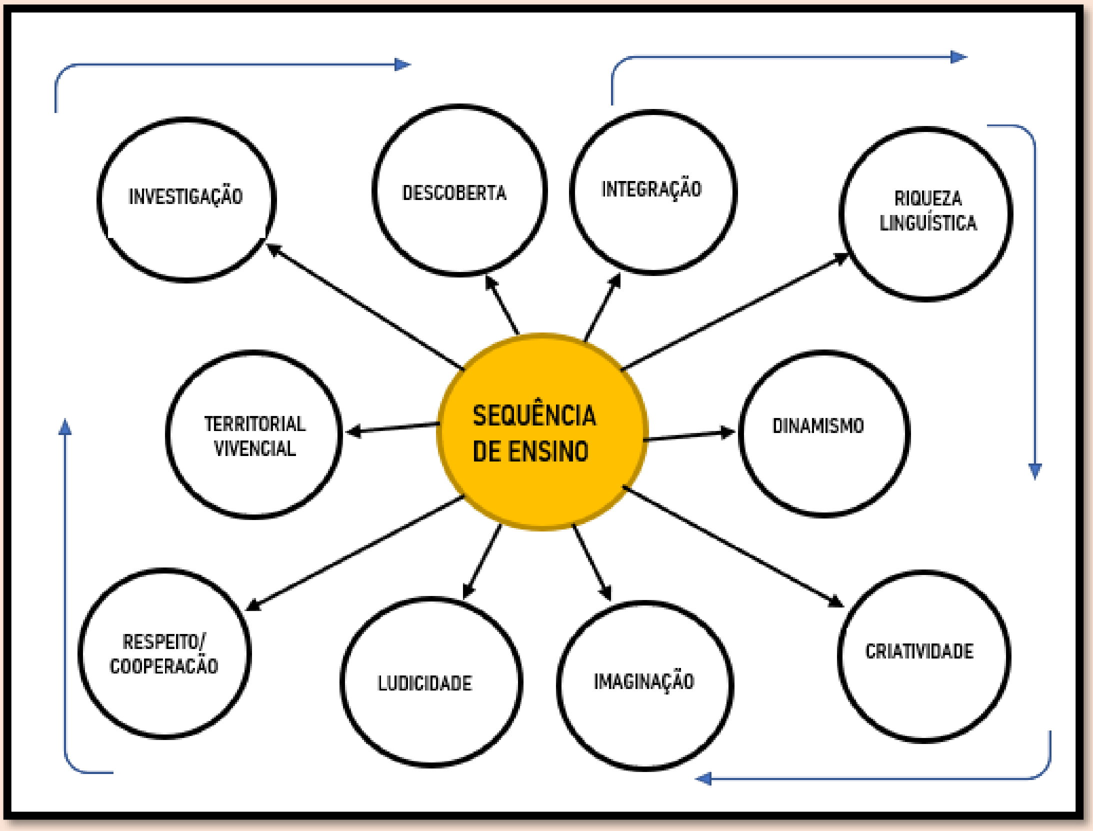
Sob a luz desse diálogo, Oliveira (2013, p. 53) define sequência como:

> [...] um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem.

No movimento de construir, a sequência de ensino é uma forma de interagir a cultura matemática com a do cotidiano, permitindo a participação ativa e reflexiva dos estudantes, e, concedendo-lhes a função construtiva de ser agente da própria aprendizagem. Assim, a sequência apresentada neste trabalho pretende fornecer subsídios para a discussão de uma Matemática crítica comprometida com a formação da cidadania. Nesse ponto, Freire (2011) destaca que os materiais elaborados para uma ação pedagógica devem ser desafiadores e não domesticadores, pois, devem estimular a capacidade crítica e curiosa do sujeito para o processo de própria transformação.

Numa visão mais fecunda e ampliada, para a compreensão de uma sequência de ensino dentro do processo formativo e reflexivo, é importante esquematizar um mapa conceitual como orientador visual de elementos contextuais pedagógicos que constituem a organização sequencial de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, Moreira (2011) explica que os mapas conceituais são representações feitas por meio de diagramas para a indicação de conceitos, podendo ainda ser, uma maneira de desenhar ou representar o conceito através de palavras. Desse modo, destacamos um esquema de ações que a sequência aborda e desenvolve no contexto escolar:

Figura 3 – Ações abordadas pela Sequência de Ensino no contexto escolar



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Partindo dessa cultura prática pedagógica, a sequência de ensino foi elaborada sob a luz da literatura de Bruner, oferecendo oportunidades de construção para o conhecimento participativo e condizente com a realidade, vislumbrando a descoberta, a criatividade, a investigação e o dinamismo de modelar o ensino matemático numa linguagem simples, apreciável e acessível, tendo em vista uma projeção real e com significação para a vida dos estudantes. Nesse sentido, Bruner (1999, p.71) chama a atenção para a construção de uma sequência salientando que, para serem ótimas dependem de alguns fatores, como a "[...] aprendizagem anterior, o estágio de desenvolvimento, a natureza dos conteúdos e as diferenças individuais".

Seguindo esse pensamento, Bruner (2006) enfatiza que a sequência de ensino é uma forma curiosa e criativa de abordar um episódio para a aprendizagem, pois, além de potencializar as atividades investigativas, possibilita a inserção do estudante num contexto prático, teórico e valorativo, favorecendo a aprendizagem com significado. Desse modo, Torre (2005, p.18) frisa que, “O ser humano chega a sua plena autorrealização quando desenvolve, ao máximo, suas potencialidades. Sendo a criatividade a qualidade mais própria e específica do ser humano [...]”.

Conforme Oliveira (2013, p. 80), a sequência de ensino é um tipo de ferramenta didática “[...] que privilegia a base conceitual para sistematizar *saberes* e produzir um novo *conhecimento* e *saber*, a começar pela definição do tema em estudo”. Segundo a autora (2013), o planejamento da sequência de ensino deve presidir um conjunto de atividades com fundamentação teórica e prática, dando subsídios para construção de novos conhecimentos. Para Zabala (1995), a sequência de ensino ou aprendizagem se estabelece por meio de relações geradas na sala de aula, configurada no clima da convivência, na abordagem do conteúdo, e por conseguinte, na aprendizagem, pois, está pautada numa perspectiva dinâmica, prática e reflexiva, visando uma intervenção pedagógica, baseada num modelo de atividade com implicações na realidade.

Portanto, a sequência de ensino construída a partir do ensino investigativo por descoberta serve de inspiração para estruturação das aulas de Matemática e de outras áreas do conhecimento, pois é uma forma de explorar os conteúdos de forma dinâmica e atrativa, sendo um veículo para construção partilhada do conhecimento, promovendo a autonomia, o respeito e novas aprendizagens.

2.2 LUDICIDADE: UMA RELAÇÃO DE EXPERIÊNCIA, DIALÓGO E CULTURA PARA FORMAÇÃO DE NOVOS SABERES

Quando delineamos um conjunto de atividades tendo como ponto de partida a descoberta sendo promovida pela ludicidade, desencadeia-se uma riqueza de conhecimentos explicitando a linguagem do cotidiano em conexão com a linguagem matemática, referenciada numa leitura contextual de mundo. Desse modo, D’Ávila (2018, p.31-32) frisa que a ludicidade é um processo criativo de inovar o espaço escolar desencadeando aprendizagens que tenham significados para a vida do estudante numa dimensão intelectual, sentimental, saber sensível e intuitivo, com vista em ações sobre o mundo que propiciam a integração harmônica na forma de pensar, agir e fazer.

A cultura lúdica permite o compartilhamento de experiências entre os estudantes, possibilitando a ampliação cultural, além de proporcionar-lhes "[...] um sentimento de deleite interno que pode manifestar-se externamente" (D'ÁVILA; FORTUNA, 2018, p. 47). Desse modo, podemos considerar que a ludicidade consiste numa realidade contextual transformada, configurando-se por meio de um conjunto de ações relacionando conhecimento e saber por via do diálogo, criatividade, sociabilidade e práticas de ensino prazerosas e atrativas.

Assim sendo, as atividades lúdicas oportunizam diferentes experiências culturais e desenvolve a capacidade imaginativa, atuando como facilitadora de aprendizagem, explicitando um sentimento de satisfação e abrindo caminhos para a aquisição de novas estruturas de conhecimentos. De acordo com D'Ávila (2018), as atividades lúdicas alteram o modelo de ensino e aprendizagem na sala de aula, pois impulsiona a novas práticas levando o estudante a vivenciar uma experiência pedagógica encantadora, tanto externamente como internamente.

Com base nesse ponto de vista, Skovsmose (2014, p.38) menciona que, "[...] A aprendizagem é uma forma de ação [...]", pois, consiste num "[...] processo repleto de intenções e motivos [...]". Desse modo, o engajamento, desempenho e aptidão são fenômenos que se relacionam com a aprendizagem, caracterizados por um conjunto de ações decorrentes da associação de várias estratégias de ensino. Nesse sentido, a ação precisa estar carregada de significados, abrindo portas para os diversos tipos de experiências culturais e estabelecendo diferentes saberes.

2.3 USO DA TECNOLOGIA NA SALA DE AULA: FERRAMENTA QUE AUXILIA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

As tecnologias de informação têm executado um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, pois, sua inserção na sala de aula veio a favorecer estratégias para elaboração das atividades, traçando um intercâmbio entre professor, estudante e informação, além de ampliar o conhecimento numa abordagem dinâmica e interativa. Para isso, é necessário que se tenha um planejamento acerca das atividades, fazendo direcionamento, acompanhamento, tratando a informação com respeito e integridade, e assim, possibilitando aos estudantes o conhecimento numa perspectiva de diferentes formas culturais.

À vista disso, a utilização da tecnologia em sala de aula deve ilustrar uma nova perspectiva, com implicações no processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista a interatividade nas atividades e estratégias pedagógicas, objetivando o desenvolvimento das capacidades intelectuais e a produção de conhecimentos que sejam concernentes à vida dos estudantes, para o aperfeiçoamento como pessoa humana. Nesse cenário, a BNCC (2017, p. 9), ressalta a seguinte competência para a Educação Básica descrevendo a preposição:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Na concepção de Bruner (2015), os dispositivos tecnológicos devem ser mais um instrumento facilitador da aprendizagem, dando suporte ao trabalho do professor e elaborando diferentes formas de pensamentos e apresentando diferentes modos de linguagem, favorecendo aos estudantes maiores flexibilizações do raciocínio lógico-dedutivo-analítico e o conhecimento. De acordo com o autor (2015), existem uma gama de recursos que auxiliam na estruturação das atividades matemáticas, tais como: livros onlines, filmes, jogos, textos, vídeos, softwares, plataformas digitais, aplicativos, de maneira que todas essas ferramentas possam ser inseridas numa sequência de ensino, com o intuito de levar o estudante ao conhecimento.

Considerando essa abordagem, a Base Nacional Comum Curricular (2017, p. 523), pontua como sendo uma das competências específicas para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática a utilização da tecnologia no ambiente escolar, como uma das formas de potencializar e compartilhar os novos conhecimentos, afirmando que:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando

> a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Portanto, a apropriação do conhecimento por meio da tecnologia representa uma extensão das capacidades da humanidade, em direção ao entendimento do meio que estão inseridos, configurando-se na conexão entre pessoas, e, como consequência, vão aprendendo e produzindo saber. Nesse aspecto, a aprendizagem é mais envolvente, residindo no modo cooperativo. É importante ressaltar que é necessário que haja uma organização estrutural no planejamento das atividades, para que se possa implantar essa ferramenta como recurso didático pedagógico na sala de aula.

2.4 ALEGORIA: FORMA LUXUOSA DE REPRESENTAR MATEMATICAMENTE UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Fundamentados nas discussões teóricas anteriores, entendemos que, a sequência de ensino é uma forma criativa de dialogar com o conteúdo de funções numa perspectiva motivacional, criativa, interativa e lúdica, criando possibilidades para discussão, reflexão e construção do conhecimento, trazendo à tona a beleza da Matemática e respeitando o espaço cultural de cada sujeito.

Para a compreensão introdutória de função, com base no ensino por descoberta, propomos uma alegoria matemática - moinho[1] (é uma engenhosidade de ferro que serve para moer ou triturar grãos por meio de forças mecânicas, que surgiu no século II d.C., tendo como inventores os gregos e romanos). Essa alegoria tem por objetivo fazer uma abordagem lúdica, dinâmica e contextualiza. No ponto de vista de Machado (2012), alegoria é uma forma criativa de representar uma situação de forma figurada e bem arquitetada, tendo em vista a compreensão do ensino da Matemática, envolvendo objetos e explicitando pensamentos, ideias, linguagem e construção.

Na visão de Kothe (1986, p. 19), “A alegoria é um tropo de pensamento, uma ampliação da metáfora, consistindo na substituição, mediante uma relação de

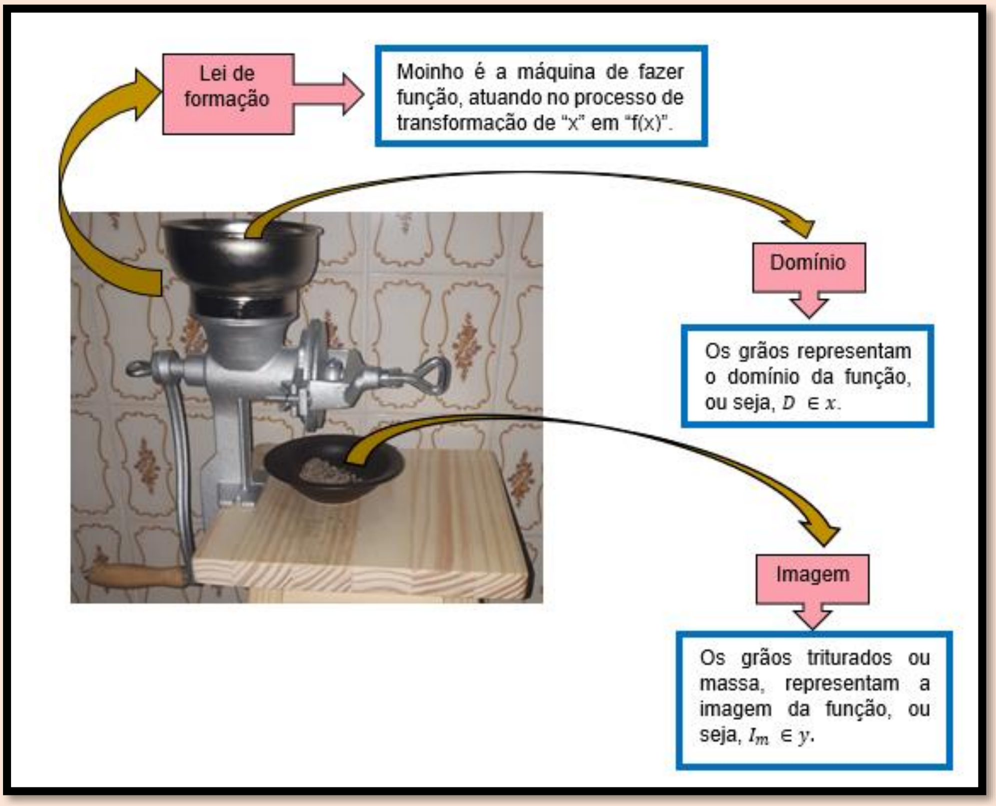
[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Moinho

semelhança, do pensamento em causa, do qual aparentemente se trata, por outro, num nível mais profundo do conteúdo".

Assim, essa forma simbólica, caracteriza um modelo representativo para o entendimento dos elementos que determinam uma função, possibilitando a iluminação de ideias para a construção e dedução de uma expressão que determina uma lei de formação. Desse modo, o moinho representa a lei de formação, os grãos que são colocados dentro do moinho representam o domínio da função, ou seja, $D \in x,$ já os grãos triturados ou massa, representam a imagem da função, ou seja, $I_m \in y$.

Na figura 4, apresentamos uma alegoria como forma de dinamizar o estudo de Funções, e, destacamos os elementos que constituem a descrição de uma Função.

Figura 4 – Alegoria matemática: moinho de fazer função



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Trilhando esse caminho de construção, o moinho é um modo estiloso, prático e lúdico de visualizar a transformação de elementos numa função, tornando o estudo interessante e atrativo, através de uma realidade concreta. Nesse sentido, refinamos e viabilizamos o Estudo de Funções através de uma estratégia alegórica com o objetivo de apoiar e inovar os processos de comunicação dentro da sala de aula, pois esta, traz no seu bojo um acervo de informações, que são inerentes ao processo de ensino e aprendizagem, com perspectivas de novos conhecimentos e novas relações de saberes.

Com base nessa afirmação, a sequência de ensino desencadeou um leque de atividades investigativas com abordagem em contextos reais e vivenciais dos estudantes, como questões voltadas para a cultura, política, economia, arquitetura, saúde, meio ambiente, tecnologia, ciência e outros, sendo possível empregar diferentes ferramentas, como: tecnológicas, ludicidades, construções manuais e atividades investigativas, com o intuito de ressignificar o contexto da sala de aula. A partir daí, exerceu-se um percurso exploratório, discursivo e investigativo, promovendo o encantamento pela matemática através do ensino por descoberta.

Bem, agora seguiremos com o detalhamento das ações pedagógicas, de forma que cada encontro descreveu uma sucessão de atividades.

2.5 DETALHAMENTO DAS ETAPAS DA SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES

"A educação deve não só transmitir cultura, mas também fornecer visões alternativas do mundo e encorajar a vontade de explorá-las" (Bruner, 2008).

APRESENTAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA À COORDENAÇÃO ESCOLAR E AOS ESTUDANTES

Inicialmente apresentamos a proposta de pesquisa a Instituição receptora – 2ºCPM-CHMJ, e posteriormente, aos estudantes do 2º ano – turma A – ensino médio. Na figura 4, expomos o cenário de apresentação por meio do Google Meet.

Figura 5 – Cenário de apresentação do trabalho de pesquisa

Imagem A	Imagem B

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Para concretização desse momento, enviamos aos pais um comunicado por meio do Google Formulário solicitando a participação do estudante; já para os discentes, fizemos um convite tanto por meio do WhatsApp quanto pelo Google Formulário. Neste, destacamos as implicações da proposta de ensino para o Estudo de Funções no processo de aprendizagem. Nesse aspecto, Marli André (2013), menciona que as redes sociais são recursos e ferramentas digitais que criam um ambiente de interatividades entre professores e estudantes, por meio do compartilhamento de ideias, informações, produções, registros e outros, com o objetivo de favorecer a aprendizagem.

Figura 6 - Convite destinados aos estudantes.

Fonte: elaborada pela autora (2021)

❖ CRONOGRAMA DAS ATIVIDADES INVSTIGATIVAS

Para guiar as atividades elaboramos o quadro 1, contendo as ações desenvolvidas em cada etapa, com o intuito de estabelecer um diálogo visual com os discentes envolvidos no processo. Essa disponibilidade temporal é um convite à inquietação, curiosidade e participação no mundo dialógico da descoberta e do saber.

Quadro 1 – Cronograma das ações pedagógicas

Ações	Horário	Data
Apresentação do projeto para os estudantes	Das 10h50min às 11h30min	15 de abril de 2021
Organização do material didático/comunicação com os estudantes por meio das redes sociais	Horário comercial	19 a 30 de abril de 2021
Entrega do material de apoio aos estudantes (materiais didáticos)	Das 8h às 11h e das 14h às 17h	04 de maio de 2021
1º encontro: Universo funcional, dinâmico e criativo da Matemática e seus desafios na construção dialógica do saber. • Estudo de Função	Das 14h às 17h	05 de maio de 2021 (quarta-feira)
2º encontro: Papo reto na interação informativa	Das 14h às 16h	07 de maio de 2021 (sexta-feira)
3º encontro: Um olhar sorridente e parabólico	Das 14h às 16h	12 de maio de 2021 (quarta-feira)
4º encontro: Um “V” para aventurar o conhecimento	Das 14h às 16h	14 de maio de 2021 (sexta-feira)
5º encontro: encerramento/ menção honrosa pela participação.	Das 14h às 16h	19 de maio de 2021 (quarta-feira)

Fonte: elaborada pela autora (2021).

Com vistas à sequência de planejamento, reiteramos que as ações pedagógicas tiveram que ser redimensionadas por conta da problemática vivenciada pela população mundial: COVID 19. Seguindo as orientações da Organização Mundial da Saúde, decretando que todas as pessoas deveriam ficar em isolamento social para evitar contágio e propagação progressiva do vírus. Assim, o trabalho teve que tomar outro rumo de execução, da prática presencial para a prática virtual. Em consequência destas limitações, foi necessário redirecionar o formato das atividades, executadas num modelo virtual, onde inserimos ferramentas tecnológicas, como: Google Meet, Canva, Jamboard, GeoGebra e WhatsApp.

Desse modo, a escola e seus segmentos tiveram que buscar novas formas de proceder com o seu trabalho de informar, instruir e formar cidadãos sem perder a sua essência e seus objetivos. Assim, professores e estudantes, foram estimulados a se adequar às novas formas de conhecimentos, modificando a estrutura do processo de ensino e aprendizagem, utilizando programas, aplicativos e ferramentas digitais.

Então, definimos que os encontros ocorreriam semanalmente no formato online, constituindo-se por seis encontros, sendo o primeiro para expor a importância da proposta de pesquisa e os benefícios ocasionados na aprendizagem. Destacamos que, a participação dos estudantes foi de forma espontânea e voluntária. Por consequência, dez estudantes se dispuseram a participar das atividades.

❖ MATERIAIS DE APOIO PEDAGÓGICO

Enviamos para as residências dos estudantes um kit de materiais de apoio para trabalhar o conteúdo de Funções. No kit continha: lápis, borracha, régua, tesoura, caderno para anotações, protótipo de uma escada, protótipo de uma ponte, dois tabuleiros para trabalhar Funções, moldes de dois dados modificados, dominó "Remexo da Função Quadrática" e uma mochila. É importante destacar que o material foi financiado pela autora. Por fim, contamos com a colaboração do 2ºCPM-CHMJ para a entrega dos materiais. Na figura 6, apresentamos o kit de materiais fornecidos aos estudantes.

Figura 7 – Kit de material de apoio para o estudante

Imagem A

Imagem B

Fonte: elaborada pela autora (2021)

De acordo com Bruner (2008), a organização do material didático serve tanto para estruturar o planejamento de aula como estimular a curiosidade e o interesse do estudante, pois, é uma forma de valorizar o personagem principal do processo de aprendizagem.

Portanto, a transparência desse momento, caracterizou-se na compreensão das ações e suas implicações no contexto escolar, sinalizando uma postura dialógica e exitosa para o processo de ensino e aprendizagem.

1º ENCONTRO: UNIVERSO FUNCIONAL, DINÂMICO E CRIATIVO DA MATEMÁTICA E SEUS DESAFIOS NA CONSTRUÇÃO DIALÓGICA DO SABER.

> *"[...] ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (FREIRE, 1996, 22).*

- **OBJETIVO:** Identificar a presença da matemática, particularmente sobre o tema função, em vários contextos do cotidiano dos estudantes, sua aplicabilidade e desafios linguísticos para resolução e compreensão de fatos e eventos.
- **TEMPO:** 2 horas

AÇÕES DESENVOLVIDAS:

1º PASSO: ABERTURA DO ENCONTRO

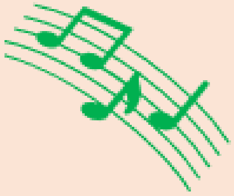
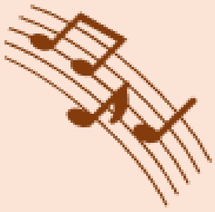
Iniciamos o encontro com a música "Aquarela" – (Compositores: Antonio Pecci Filho Toquinho/Vinicius de Moraes). Em seguida, demos boas-vindas aos participantes e falamos da importância de aprender, partindo da natureza criativa do ser humano.

Aquarela

Numa folha qualquer eu desenho um sol amarelo
E com cinco ou seis retas é fácil fazer um castelo
Corro o lápis em torno da mão e me dou uma luva
E se faço chover, com dois riscos tenho um guarda-chuva
Se um pinguinho de tinta cai num pedacinho azul do papel
Num instante imagino uma linda gaivota a voar no céu
Vai voando, contornando a imensa curva norte e sul
Vou com ela, viajando, Havaí, Pequim ou Istambul

Pinto um barco a vela branco, navegando, é tanto céu e mar num beijo azul
Entre as nuvens vem surgindo um lindo avião rosa e grená
Tudo em volta colorindo, com suas luzes a piscar
Basta imaginar e ele está partindo, sereno, indo
E se a gente quiser ele vai pousar
Numa folha qualquer eu desenho um navio de partida
Com alguns bons amigos bebendo de bem com a vida
De uma América a outra consigo passar num segundo
Giro um simples compasso e num círculo eu faço o mundo
Um menino caminha e caminhando chega no muro
E ali logo em frente, a esperar pela gente, o futuro está
E o futuro é uma astronave que tentamos pilotar
Não tem tempo nem piedade, nem tem hora de chegar
Sem pedir licença muda nossa vida, depois convida a rir ou chorar
Nessa estrada não nos cabe conhecer ou ver o que virá
O fim dela ninguém sabe bem ao certo onde vai dar
Vamos todos numa linda passarela
De uma aquarela que um dia, enfim, descolorirá
Numa folha qualquer eu desenho um sol amarelo (que descolorirá)
E com cinco ou seis retas é fácil fazer um castelo (que descolorirá)
Giro um simples compasso e num círculo eu faço o mundo (que descolorirá)
Que descolorirá
Que descolorirá



2º PASSO: ESTRATÉGIA DE DIÁLOGO

Por meio de perguntas e respostas:

- Os estudantes são divididos em dois grupos. A interação e o diálogo são realizados por meio de situações matemáticas em que a equipe “A” pergunta e a equipe “B” responde, e assim, vice-versa.
- Cada equipe tem de 2 a 3 minutos para responder à pergunta, não sabendo a resposta, passa a vez para a outra equipe.

- As cartas contêm perguntas enumeradas. O número de cartas fica a critério de cada professor(a). Para essa estratégia usamos dez cartas.
- Pode ocorrer de dois ou mais estudante saberem da resposta, logo, a equipe analisa e chega a um senso comum, ou seja, resposta única.
- O objetivo não é pontuar quem ganha ou quem perde, mas verificar os conhecimentos acerca do conteúdo abordado.

No quadro 2, veremos o modelo da estratégia para o diálogo numa abordagem matemática.

Quadro 2 – Atividade lúdica: modelo da estratégia do diálogo

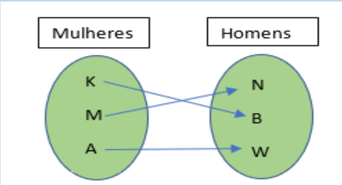
PERGUNTAS	RESPOSTAS
1. Qual é o próximo número da sequência: 5, 11, 17, 23, 29, ...?	R: 35
2. O Restaurante “BYS” oferece serviço de pronta entrega, e para isso, cobra uma taxa fixa de R$ 5,00 e mais R$ 1,50 por quilometro rodado no percurso entre o restaurante e o local da entrega. Quanto será o valor pago, se o local de entrega for de 12 km do restaurante?	R: R$ 23,00

3. A Praça “Bom Viver” foi construída no formato de um pentágono regular, cujo lado mede 4 metros. Quanto vale o perímetro dessa praça?	R: $P = 6.l = 24\ m$
4. Niara comprou 10 caixas de chocolates na Kibombom para presentear seus amigos. Sabendo que, cada caixa de chocolate custou R$ 8,30 e mais R$ 12,00 para receber em sacolas de presentes. Qual foi o valor pago por Niara?	R: R$ 95,00
5. Qual o valor da função f(x) = $-3x + 2$, se x = 4?	R: -10

6. Nina trabalha numa loja como vendedora e ganha uma quantia fixa de R$ 400,00 e mais 2% do valor das vendas efetuadas. Quanto Nina ganhará se vender R$ 1000,00?

R: $R\$\ 420{,}00$

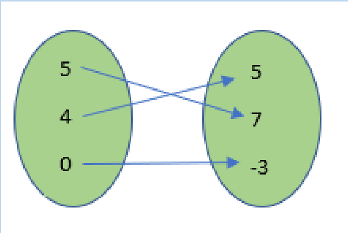
7. Numa festa entre amigos, formaram-se casais para dançar uma valsa. Observe a formação dos casais:



Essa formação de casais indica uma função? Justifique.

R: Sim. Cada elemento do conjunto M tem um correspondente no conjunto H.

8. O diagrama representa uma função de A em B. Escreva uma lei de formação.



R: $f(x) = 2x - 3$

9. Esta imagem traz elementos que lembram o gráfico de alguma função? Se acaso for afirmativo, qual(is)? 	R: Sim. Função Quadrática e Função Afim
10. Esta figura apresenta elementos que lembram o gráfico de alguma função? Em acaso afirmativo, indique a(s) função(ões). 	R: Sim. Função Modular Função Afim

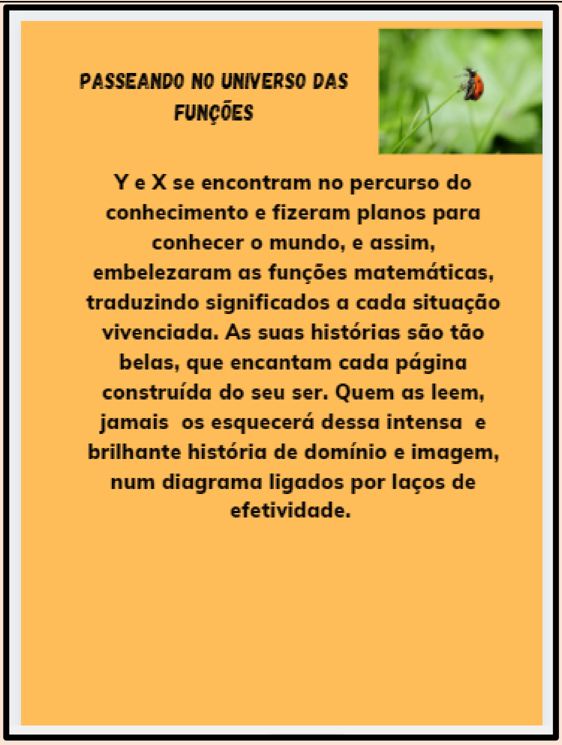
Fonte: elaborada pela autora (2021).

3º passo: Quadro "Conhecer e descobrir"

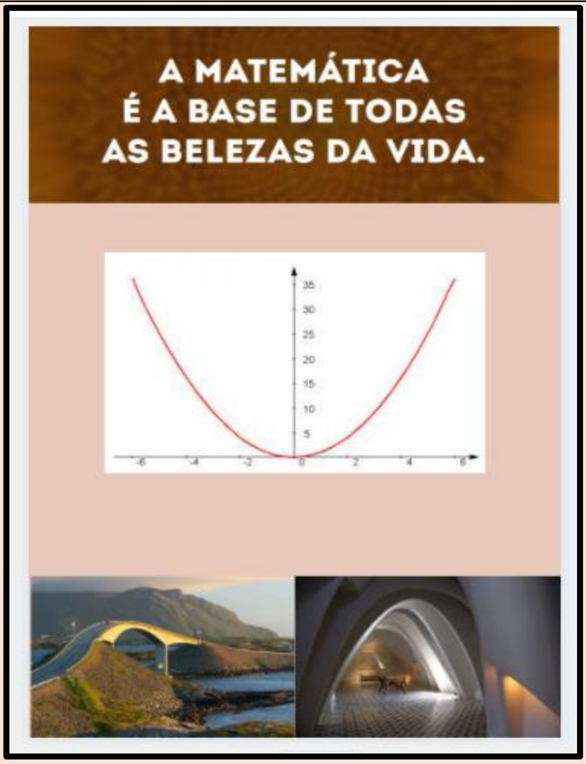
É caracterizado pelo momento de pesquisa e investigação, buscando relatos, experiências, ideias e construções para o processo de ensino por descoberta, envolvendo a temática em estudo. A realização dessa atividade ocorreu por meio da construção coletiva de um mural utilizando a plataforma digital Canva, onde todos os estudantes adicionam suas imagens, informações e textos. Dessa forma, eles recebem o link para trabalharem cooperativamente o pôster, resultando num momento de integração, respeito mútuo e conhecimento. No quadro 3, mostraremos alguns pôsteres construídos pelos estudantes.

Quadro 3 – Pôsteres produzidos pelos estudantes

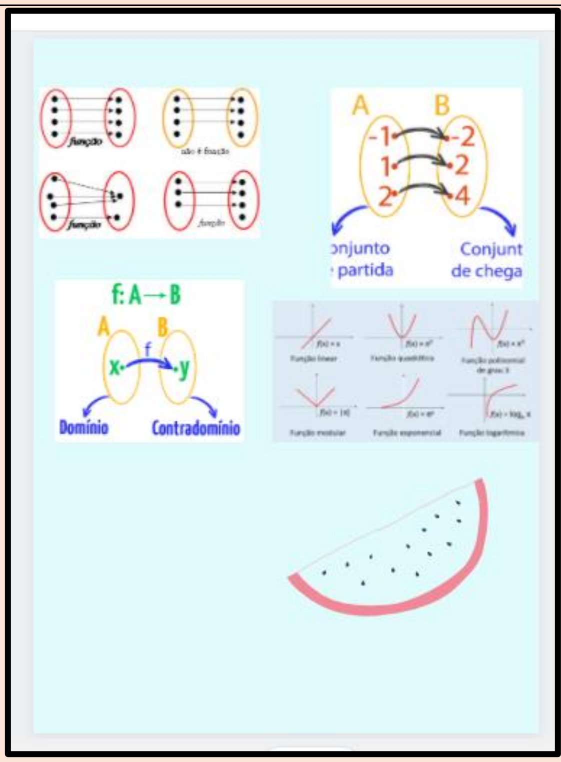
Pôster 1



Pôster 2



Pôster 3



Poster 4

Fonte: Canva. Link de acesso: https://www.canva.com/design/DAEdXTA4ogk/share/preview?token=8kbx8M9M3Q2A40YHcwVJ2w&role=EDITOR&utm_content=DAEdXTA4ogk&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=sharebutton

Portanto, as produções foram elaboradas a partir da comunicação e interação entre os estudantes; este momento privilegia as diferentes formas de linguagem, imaginação, curiosidades e investigações, privilegiando as interfaces da cultura matemática.

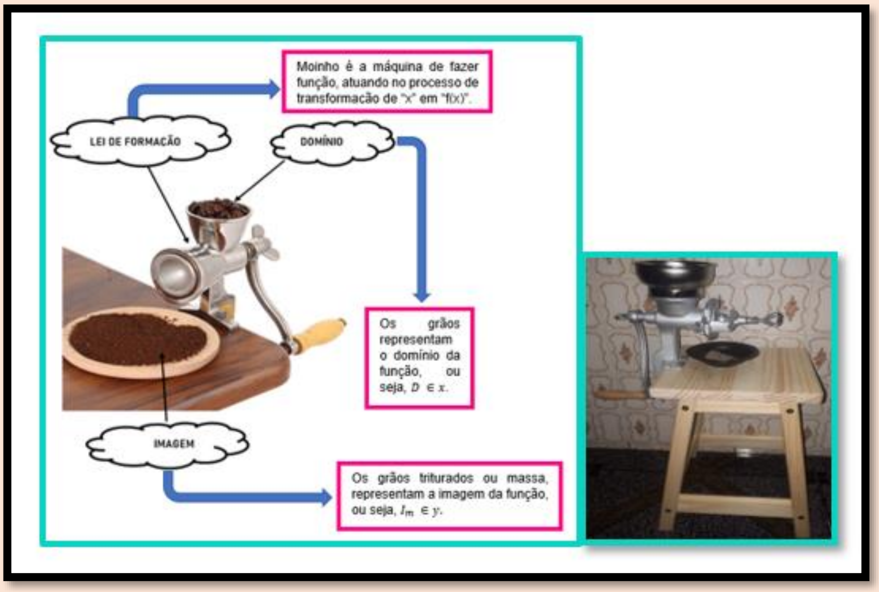
4º passo: Explanação de teórica de função

A ideia de função construída a partir de uma alegoria Matemática – “moinho”, reforçando o raciocínio lógico, intuitivo e analítico. A abordagem alegórica trata de uma significação contextual cotidiana com a utilização de grãos (x), quando processado por meio do moinho (lei de formação), o resultado irá representar o valor final da função f(x).

De acordo com a ótica de Bruner (2006), alegoria é forma criativa, refinada e talentosa de abordar um conteúdo, por meio de um modelo concreto, operando ideias e sentidos; para compreensão matemática, esse modelo reflete uma atividade instrumental que propõe uma ampliação do conhecimento matemático e o desenvolvimento de habilidades, por meio de elaborações, comparações e operações.

Assim, tal modelo metafórico nos concebe a ideia construtiva de Função, a qual podemos visualizar na figura 8.

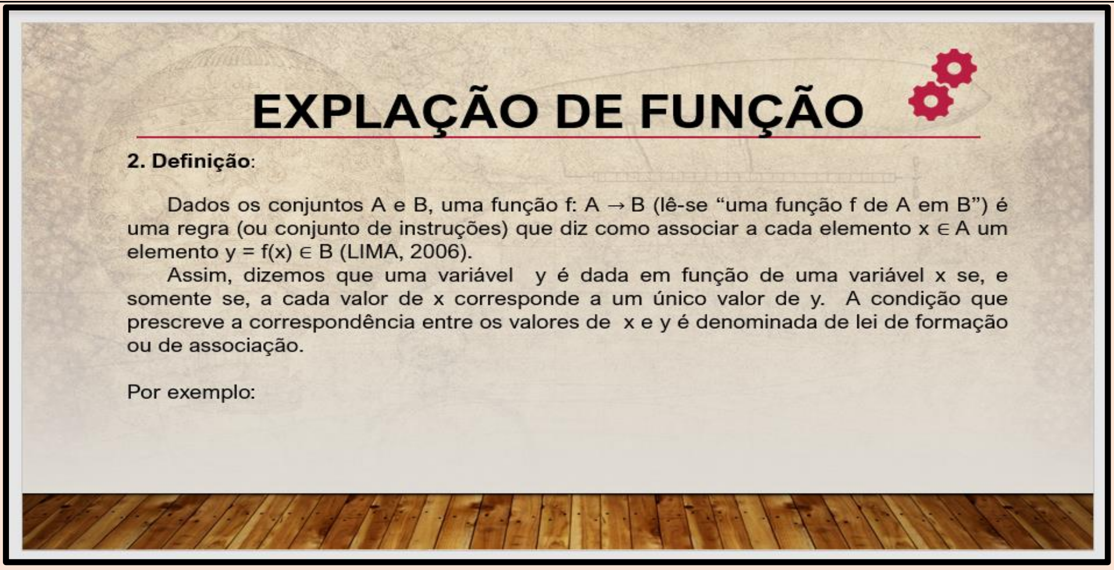
Figura 8 – Alegoria matemática para o estudo de Funções: Moinho



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

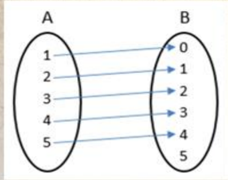
Após essa abordagem, apresenta-se um resumo implicativo de Função. Para essa explanação utilizamos uma ferramenta do Google denominada Google Meet. Assim, no quadro 4, expomos um resumo de Função apresentada aos estudantes.

Quadro 4 – Resumo de Função apresentada aos estudantes



EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

Seja A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, vamos associar os elementos dos dois conjuntos. Para isso, vamos representar os conjuntos através de diagramas e associarmos seus elementos usando flechas.



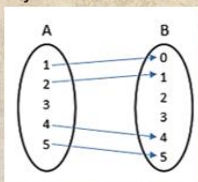
Veja que esta forma como associamos os elementos dos dois conjuntos é uma função, pois, foi associado a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B. Poderíamos representar essa função de outras maneiras. Veja que, para cada elemento x ∈ A foi associado o elemento x – 1 ∈ B. Assim, representamos essa função por:

$f : A \rightarrow B$, que significa que a função f de A em B relaciona o elemento x ∈ A e y ∈ B.

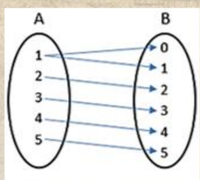
f: A → B tal que f(x) = x – 1, chamada de lei de formação.

EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

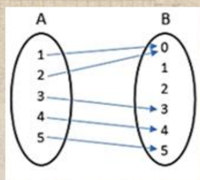
Vejamos outras associações entre os elementos dos conjuntos A e B:



Não é uma função, pois o elemento ao elemento 3 ∈ A não foi associado elemento de B.



Não é uma função, pois ao elemento 1 ∈ A foi associado mais de um elemento de B



É uma função, pois para cada elemento de A está associado um único elemento de B, mesmo que os elementos 1 e 2 de A estejam relacionados ao mesmo elemento de B, a cada um deles está associado somente um elemento, atendendo aos requisitos para ser uma função de A em B.

EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

3. Domínio, contradomínio e imagem de uma função

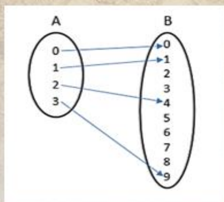
Dada uma função f: A → B, chamamos o conjunto A de domínio da função e o conjunto B de Contradomínio. A cada elemento f(x) ∈ B associado a um elemento x de A chama-se imagem de x pela função f (LIMA, 2006). Ao conjunto formado por todas as imagens de x chamamos de conjunto imagem.

Dada a função f: A → B definida por f(x) = x², onde A= {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 8, 9}, temos que para cada elemento x foi associado o elemento x². Representando essa função usando diagramas e flechas, temos:

Vejamos um exemplo:

EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

Dada a função f: A → B definida por $f(x) = x^2$, onde A= {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 8, 9}, temos que para cada elemento x foi associado o elemento x^2. Representando essa função usando diagramas e flechas, temos:



O domínio da função é o conjunto A e o contradomínio, o B, que representamos por D(f) = A e CD(f) = B, respectivamente. Observe que nem todos os elementos de B estão associados a elementos de A, ou seja, nem todos são imagem de algum elemento de A. Pela lei de formação $f(x) = x^2$, temos:

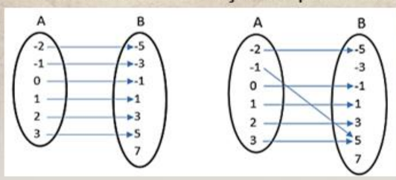
$f(0) = 0^2 = 0$, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3) = 3^2 = 9$. Assim, o conjunto imagem da função f é Im(f) = {0, 1, 4, 9}.

EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

4. Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

4.1. Injetiva: Uma função f: A B é dita injetiva ou injetora quando para elementos x ∈ A diferentes são associados elementos f(x) ∈ B diferentes ($x_1 \neq x_2 \leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$), ou seja, todos os elementos do domínio possuem imagens diferentes (JORGE, 2009).

Observemos as funções representadas nos diagramas abaixo:

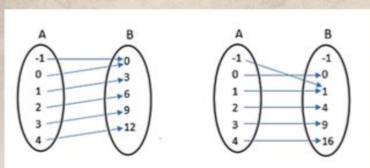


Veja que, na primeira função para cada elemento diferente x ∈ A está associado um elemento diferente f(x) ∈ B, sendo assim uma função injetiva. Já no segundo exemplo, os elementos -1 e 3 de A, embora sejam diferentes, apresenta a mesma imagem, f(-1) = f(3) = 5, e por isso, a função não é injetiva.

EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

4.2. Sobrejetiva: Uma função f: A → B é chamada de sobrejetiva ou sobrejetora quando para qualquer y ∈ B existe pelo menos um x ∈ A tal que y seja imagem de A (∀ y ∈ B | y = f(x)), ou seja, todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio (JORGE, 2009). Numa função sobrejetiva f, temos: D(f) = Im(f).

Veja alguns exemplos usando diagramas:

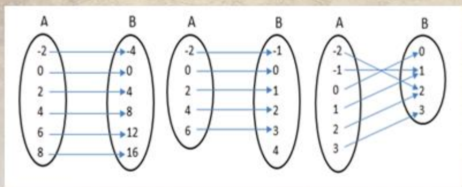


No primeiro exemplo, os elementos de B são imagens de algum elemento de A, o que caracteriza uma função sobrejetiva. Já no segundo exemplo, o elemento -1 do conjunto B não é imagem de nenhum elemento de A, portanto a função não é sobrejetiva.

EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

4.3. Bijetiva: Uma função f: A → B é chamada de bijetiva ou bijetora quando ela é simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Podemos dizer que uma função é bijetiva se todo elemento y ∈ B é imagem de um único x ∈ A (∀ y ∈ B, ∃* x ∈ A | y = f(x)) (JORGE, 2009).

Veja os exemplos:



Observe que a primeira função é bijetiva, pois é injetiva, elementos diferentes de A tem imagens diferentes em B, e sobrejetiva, todos os elementos de B são imagens de algum elemento de A. Equivalentemente, temos que cada elemento de B é imagem de um único elemento de A, que é, uma outra forma de verificar se a função é bijetiva.

A segunda e terceira função não são bijetivas. A segunda é injetiva, porém não é sobrejetiva, pois há um elemento em B que não é imagem de nenhum elemento de A. Já a terceira, é sobrejetiva, mas não é injetiva, pois temos elementos diferentes de A com a mesma imagem em B.

EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

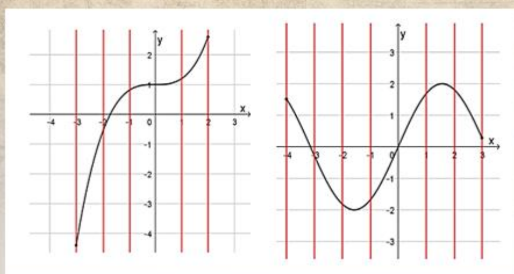
5. Gráfico de uma função:

Podemos representar uma função no plano cartesiano. Tal representação é chamada de gráfico cartesiano ou simplesmente gráfico da função. O gráfico de uma função f: A → B é formada por todos os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são os pares ordenados (x, y) em que x ∈ A e y = f(x) (JORGE, 2009), ou seja, o gráfico de uma função é formado por pontos cujas abscissas são elementos do domínio da função e as ordenadas, são as respectivas imagens desses elementos.

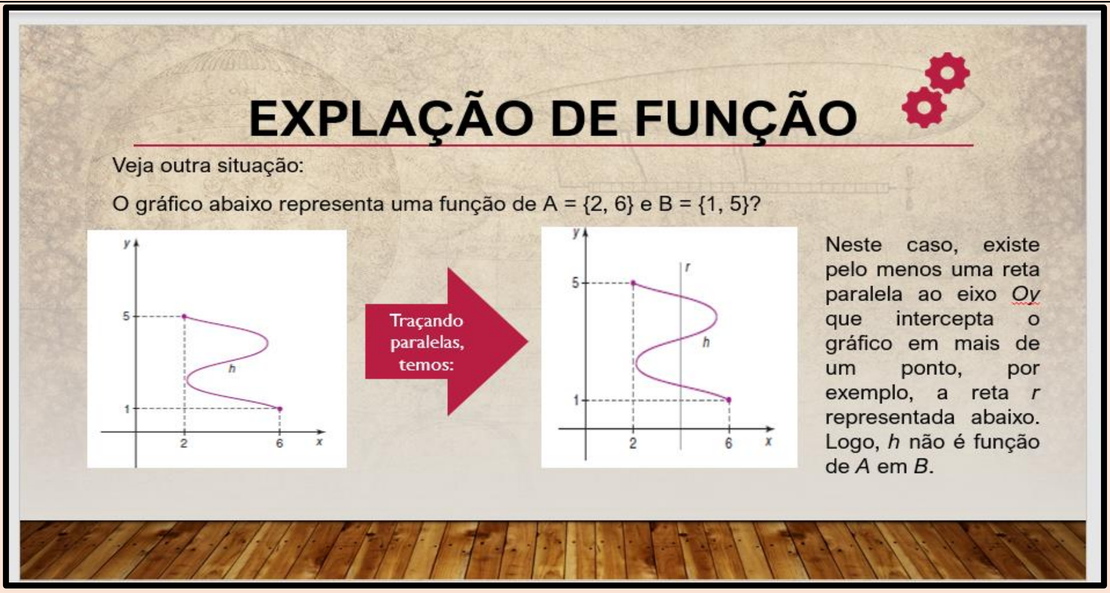
Para verificarmos se um gráfico dado é gráfico de uma função, verificamos se qualquer reta paralela ao eixo y e que seja formada por pontos cujas abscissas pertencem ao domínio interceptam o gráfico em um único ponto. Se isto ocorrer, o gráfico em questão representa uma função. Se pelo menos uma destas paralelas tocar o gráfico em mais de um ponto, o gráfico não é de uma função, pois estes pontos terão a mesma abscissa e ordenadas diferentes, o que indica um valor do domínio com duas imagens.

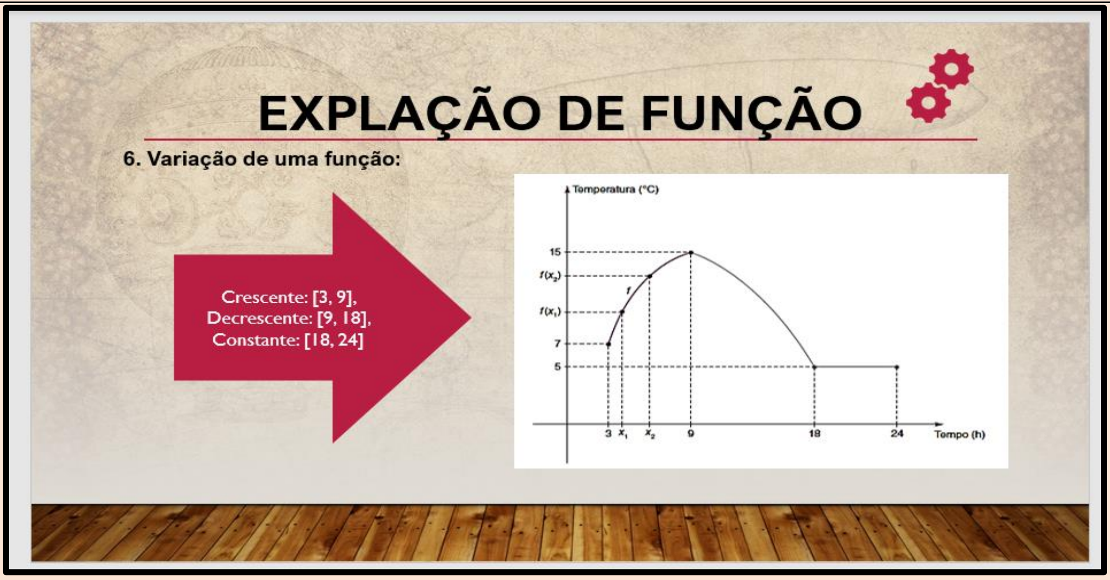
EXPLAÇÃO DE FUNÇÃO

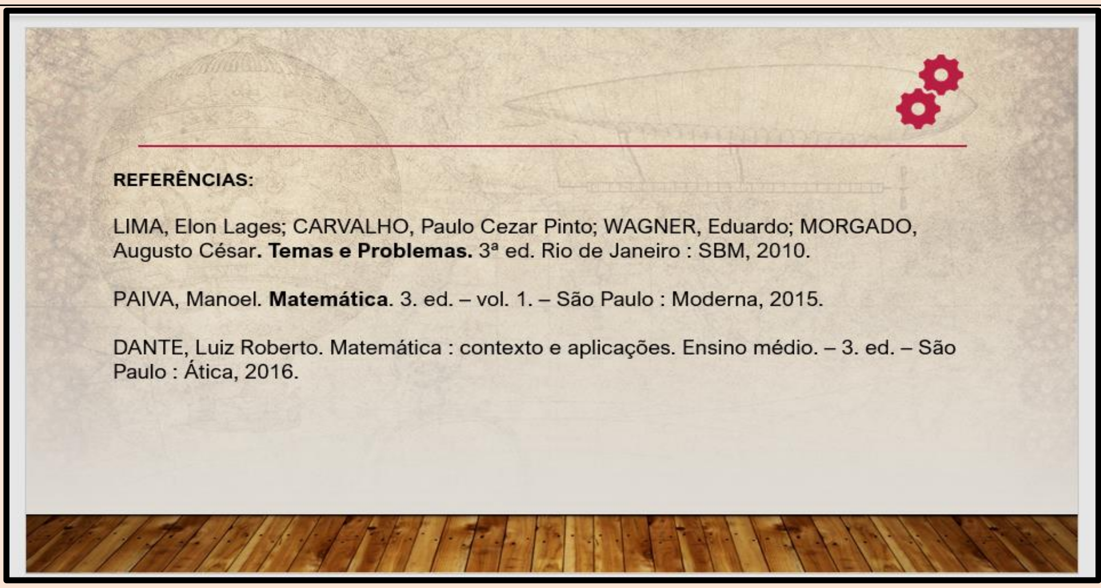
Observe os gráficos abaixo. Veja que, no da esquerda, as abscissas dos pontos que pertencem ao gráfico variam de -3 a 2 e no da esquerda, variam de -4 a 3.



Não existe, em nenhum dos dois casos, uma reta paralela ao eixo y que toque os gráficos em mais de um ponto. Logo, estes gráficos são gráficos de funções.





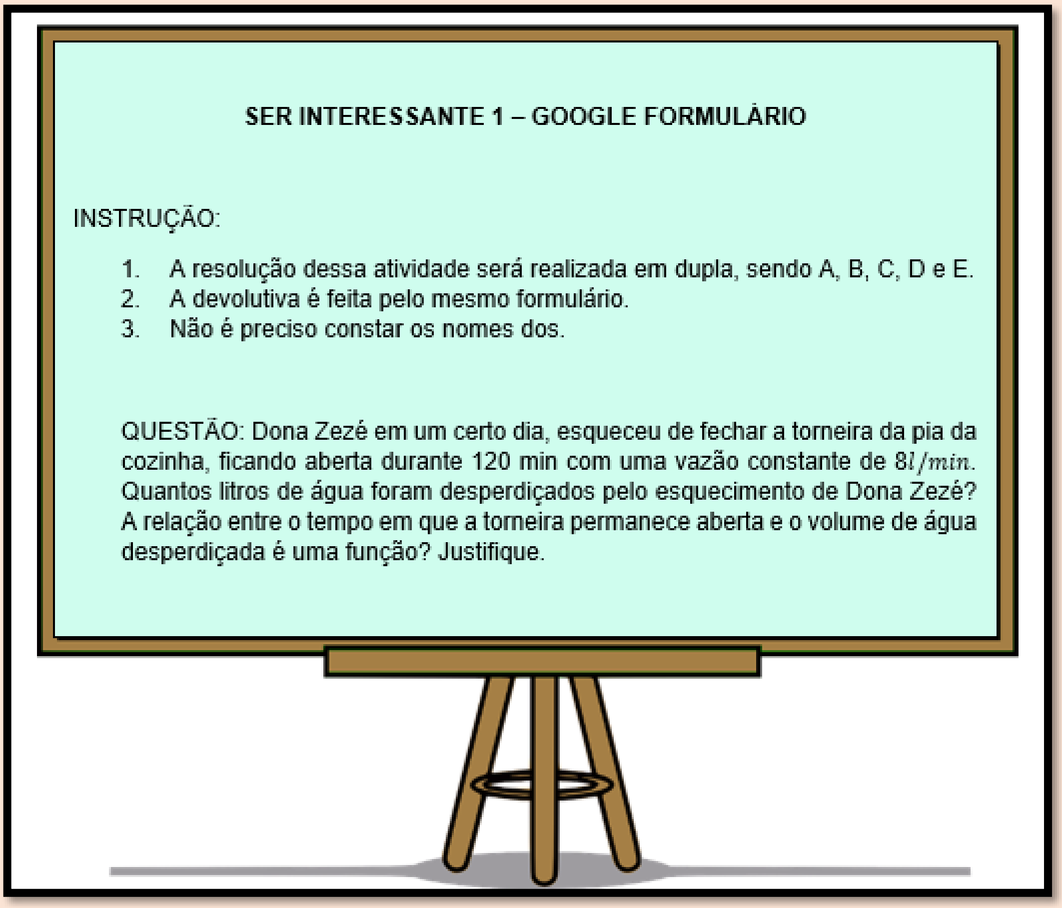


Fonte: Elaborada pela autora (2021).

5º passo: Quadro "Ser interessante"

A finalidade dessa atividade consiste em compreender as implicações de Funções por meio de situações problemas abordadas no cotidiano, possibilitando a interpretação, explorar a linguagem, elaboração de conjecturas para resolução, desenvolvimento do raciocínio lógico-analítico, trabalho coletivo e o respeito mútuo. Dessa forma, a ação integra uma questão matemática 1, visando a organização do pensamento e a participação ativa dos estudantes, conforme apresentada na figura 9.

Figura 9 – Questão matemática 1: ampliando saberes



Fonte: elaborada pela autora (2021).

6º passo: Abrilhantando o conhecimento

Para ilustrar este momento, entregamos para cada participante um protótipo de Função no formato de tabuleiro para ousar com a imaginação e criatividade, como podem observar na figura 10.

Figura 10 – Tabuleiro ilustrativo para o Estudo de Função

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

A aplicação dessa atividade no contexto do ensino auxilia no processo argumentativo para a elaboração da definição contextual de Função, de forma dinâmica e estimuladora, descrevendo diferentes situações para a verificação de "se é ou não" Função, com o intuito de justificar as alternativas exploradas e inserir a linguagem matemática no contexto da sala de aula, sob a mediação do professor.

7º passo: Encerramento do encontro

Ao finalizar o encontro, registramos as observações e comentários dos estudantes, os quais auxiliaram no desenvolvimento de outras atividades. Por isso, é importante o processo de escuta na sala de aula, porque proporciona o compartilhamento de saberes. Por fim, agradecemos a participação.

2º ENCONTRO: FUNÇÃO AFIM: PAPO RETO NA INTERAÇÃO INFORMATIVA

"Não há sequência única para todos os aprendizes, e o ótimo para cada caso dependerá de uma variedade de fatores, incluindo o grau de aprendizado anterior, estágio de desenvolvimento, natureza do conteúdo e as diferenças individuais" (BRUNER, 2006, p. 60).

- **OBJETIVO:** Perceber a relevância da função afim nas construções contextuais do cotidiano e suas implicações na leitura, descrição e relações entre dois eventos ou informações.
- **TEMPO**: 2 horas
- **AÇÕES DESENVOLVIDAS:**

1º PASSO: Abertura do encontro com o vídeo da música "O caderno" – interpretado por Padre Fabio de Melo (Compositores: Antonio Pecci Filho/Lupicinio Morais Rodrigues).

O Caderno

Sou eu quem vou seguir você
Do primeiro rabisco até o bê-á-bá
Em todos os desenhos coloridos vou estar
A casa, a montanha, duas nuvens no céu
E um sol a sorrir no papel
Sou eu que vou ser seu colega
Seus problemas ajudar a resolver
Lhe acompanhar nas provas bimestrais
Você vai ver
Serei de você confidente fiel
Se seu pranto molhar meu papel
Sou eu que vou ser seu amigo

Vou lhe dar abrigo, se você quiser
Quando surgirem seus primeiros raios de mulher
A vida se abrirá num feroz carrossel
E você vai rasgar meu papel
O que está escrito em mim comigo
Ficará guardado, se lhe dá prazer
A vida segue sempre em frente, o que se há de fazer
Só peço a você um favor, se puder
Não me esqueça num canto qualquer
Eu não sei se você se recorda do seu primeiro caderno
Eu me recordo do meu
Com ele eu aprendi muita coisa
Foi nele que eu descobri que a experiência dos erros
Ela é tão importante quanto às experiências dos acertos
Porque vistos de um jeito certo
Os erros, eles nos preparam
Para nossas vitórias e conquistas futuras
Porque não há aprendizado na vida
Que não passe pelas experiências dos erros
O caderno é uma metáfora da vida
Quando os erros cometidos eram demais, eu me recordo
Que a nossa professora nos sugeria que a gente virasse a página
Era um jeito interessante de descobrir a graça que há nos recomeços
Ao virar a página, os erros cometidos deixavam de nos incomodar
E a partir deles a gente seguia um pouco mais crescido
O caderno nos ensina que erros não precisam ser fontes de castigos
Erros podem ser fontes de virtudes
Na vida é a mesma coisa
O erro tem que estar a serviço do aprendizado
Ele não tem que ser fonte de culpas, de vergonhas
Nenhum ser humano pode ser verdadeiramente grande
Sem que seja capaz de reconhecer os erros que cometeu na vida
Uma coisa é a gente se arrepender do que fez
Outra coisa é a gente se sentir culpado

Culpas nos paralisam
Arrependimentos não
Eles nos lançam pra frente
Nos ajudam a corrigir os erros cometidos
Deus é semelhante ao caderno
Ele nos permite os erros pra que a gente aprenda a fazer do jeito certo
Você tem errado muito?
Não importa
Aceite de Deus essa nova página de vida que tem nome de hoje
Recorde-se das lições do seu primeiro caderno
Quando os erros são demais, vire a página
O que está escrito em mim comigo
Ficará guardado, se lhe dá prazer
A vida segue sempre em frente, o que se há de fazer
Só peço a você um favor
Se puder
Não me esqueça num canto qualquer

- **COMENTÁRIO DA ESTRATÉGIA:**

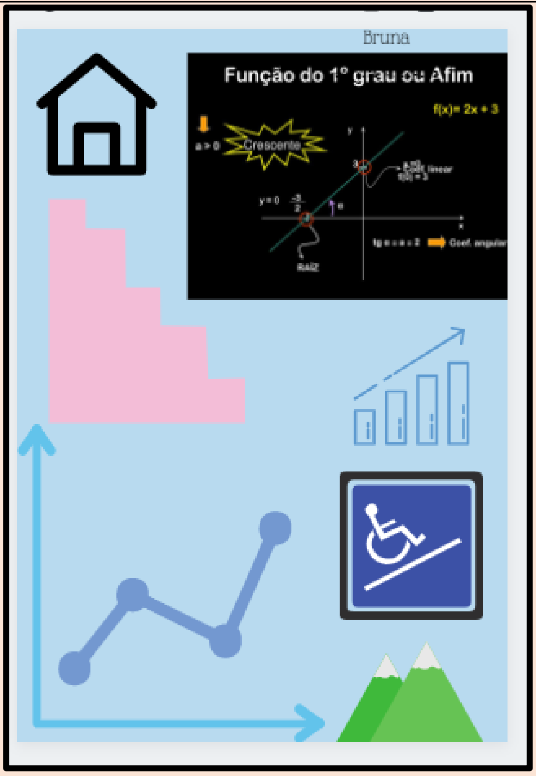
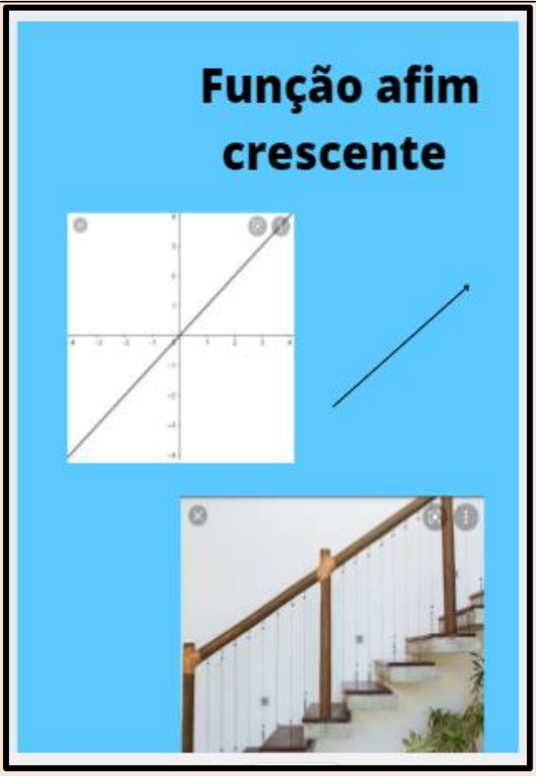
A inclusão de música consiste numa estratégia lúdica e divertida com o propósito de integrar os participantes no processo de ensino e aprendizagem, destacando-a como forma de manifestação cultural, expressando emoções, sentimentos, vivências e incentivo à aprendizagem. Para essa atividade trabalhamos: memórias, conhecimentos, experiências, motivações, problemas cotidianos, contextualização matemática, culturas e saberes, tendo em vista o conhecimento matemático e a aprendizagem com significado.

2º PASSO: Construir coletivamente vários pôsteres destacando problemas do cotidiano envolvendo diversos cenários de Função Afim, abordando aspectos como crescimento, decrescimento, conjectura simbólica e aplicações.

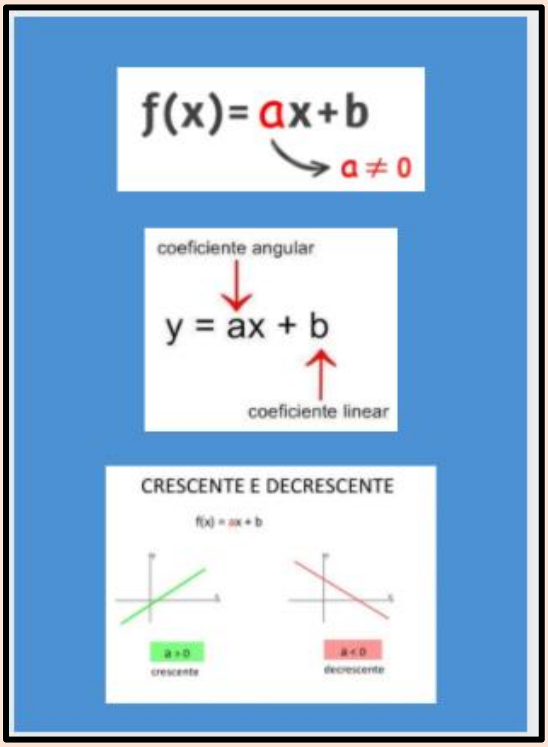
Esse formato de atividade encoraja os estudantes a discutirem e elaborarem diferentes saberes, por meio de informações, imagens, problemas do cotidiano, observação e investigação, possibilitando assim, a visualização de novas situações no contexto escolar, com o intuito de integrar um conjunto de conhecimentos a diferentes formas de aprendizagens.

Para esse momento de produção, utilizamos a ferramenta digital Canva, sendo acessado por meio de um link. Assim, evidenciamos no quadro 5, alguns modelos de pôsteres construídos pelos discentes.

Quadro 5 – Pôsteres produzidos pelos estudantes

 Pôster 1	 Pôster 2

Pôster 3



Pôster 4

Fonte: Canva. Link de acesso:
https://www.canva.com/design/DAEdzx5gQLQ/share/preview?token=Zb4FoH7OJH3KDN_EdGOF3Q&role=EDITOR&utm_content=DAEdzx5gQLQ&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=sharebutton

3º passo: Abrilhantando o conhecimento

Essa tarefa é conduzida pela apresentação do protótipo de uma escada, onde tratamos de uma situação real para estudar as relações de Função Afim, contemplando uma visão ampliada, contextualizada, lúdica e analítica para novas descobertas.

Desse modo, os estudantes são divididos em dois grupos, A e B, e cada grupo ousa, elabora, discute possíveis soluções e viabiliza a criatividade. Assim, é possível realizar várias abordagens acerca do objeto em estudo, tais como:

- Calcular o perímetro, área e altura;
- Trabalhar proporcionalidade;
- Determinar a distância entre um degrau e outro;
- Trabalhar escala;
- E efetuar diferentes análises, mediante a curiosidade e investigação do estudante.

Mergulhados nesse embarque de ideias e construções, vão decorrendo outros questionamentos, análise e conjecturas. Enfim, acerca dessa estratégia descrevemos informações envolvendo duas variáveis, x e y. Desse modo, exibimos na figura 11, o modelo do protótipo de uma escada apontando algumas perguntas para serem analisadas. Vale dizer que essas perguntas podem ser ampliadas para melhor entendimento no processo de aprendizagem.

Figura 11 – Imagem do protótipo de uma escada apontando algumas perguntas

Vamos analisar?

1. A altura da escada está em função ao número de degraus?
2. Cada degrau tem o formato de retângulo. Podem calcular o perímetro? E a área? O perímetro e a área estão em função de quem?
3. Você consegue visualizar mais informações sobre este protótipo? Qual?

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Então, a partir dessa imagem e perguntas os estudantes foram instigados e encorajados a diferentes formas de raciocínio, análises, comparações, modelos e soluções, enfatizando o processo investigativo por descoberta.

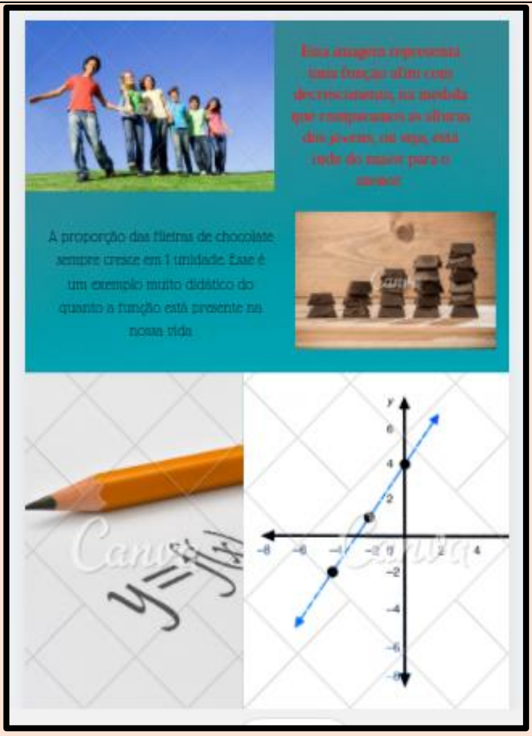
4º passo: Quadro "Conhecer e descobrir"

É promovido pela curiosidade e investigação. Essa atividade trata da construção de um mural interativo, em que os estudantes descrevem situações do cotidiano que demostrem as implicações de Função Afim, destacando notícias, análises e interpretações gráficas, problemas, aplicações e outras situações de convívio social e cultural. Para realização da tarefa utilizamos a ferramenta digital Canva, com o intuito de promover a integração, trabalho cooperativo e a comunhão de conhecimento.

Então, no quadro 6, expomos alguns trabalhos feitos pelos estudantes.

Quadro 6 – Pôsteres produzidos pelos estudantes

Pôster 1

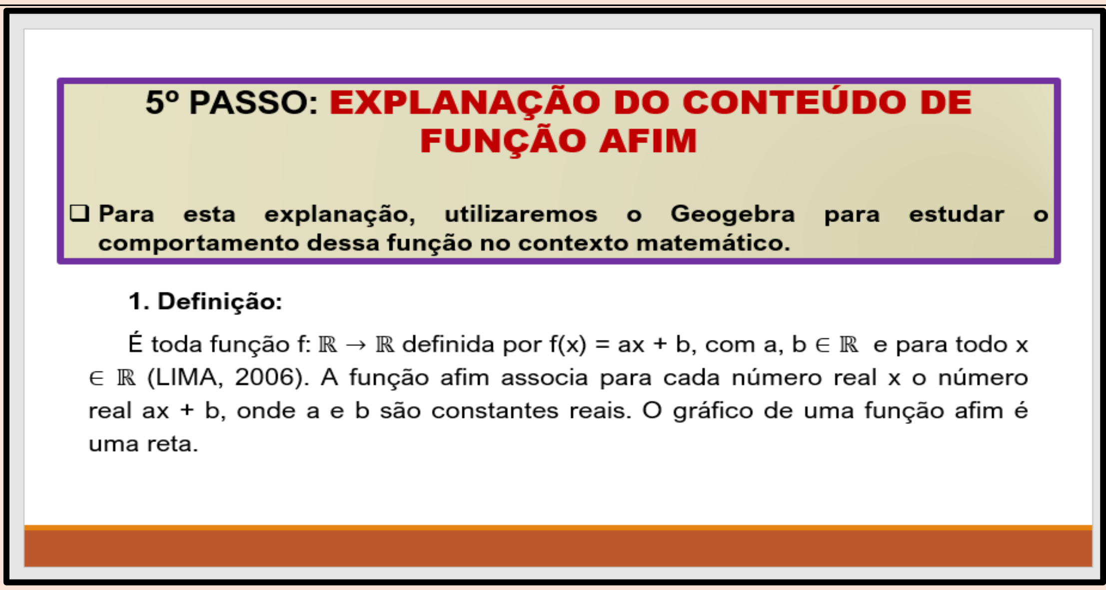


Pôster 2

Fonte: Canva. Link de acesso: https://www.canva.com/design/DAEdzx5gQLQ/share/preview?token=Zb4FoH7OJH3KDN_EdGOF3Q&role=EDITOR&utm_content=DAEdzx5gQLQ&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=sharebutton

5º PASSO: EXPLANAÇÃO DO CONTEÚDO DE FUNÇÃO AFIM

Quadro 7 – Resumo de Função Afim apresentada aos estudantes



2. CASOS PARTICULARES DA FUNÇÃO AFIM:

FUNÇÃO LINEAR:

Um caso particular de função afim é aquele em que $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$. Nesse caso, temos a função afim f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}$ com $\boldsymbol{a}$ real e $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, que recebe a denominação especial de função linear.

F(x) = ax +b

FUNÇÃO CONSTANTE:

Se em $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ temos a $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, a lei não define uma função afim, mas sim outro tipo de função denominada função constante.

Chama-se função constante uma função $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, ou seja, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

❑ Verificação no Geogebra

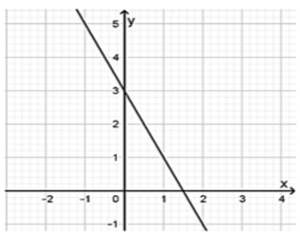
3. CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

Dada a função afim f (x) = ax + b, com taxa de variação a, temos:

I. f é crescente se, e somente se, a é positivo.

II. f é decrescente se, e somente se, a é negativo.

Vejamos o gráfico da função afim f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = -2x + 3.



Vamos analisar:

1. Essa função é crescente ou decrescente?
2. Quando x = 2, qual deve ser o valor de y?
3. Quando y= 0, qual deve ser o valor de x?

4. RAIZ DE UMA FUNÇÃO DO 1º GRAU:

Chama-se raiz ou zero da função polinomial do 1º grau, dada por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$, com $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, o número real x tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Temos:

Exemplo:

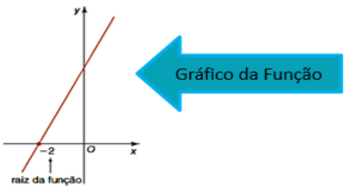
Vamos determinar a abscissa do ponto de intersecção da reta de equação $y = 2x + 4$ com o eixo Ox:

$0 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = -4$

$\therefore x = -2$

Logo, a reta cruza o eixo Ox no ponto $(-2, 0)$.

Observe que -2 é a raiz da função.



5. ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO AFIM

Para estudar o sinal de uma função *f*, significa determinar os valores de *x* para os quais *f* se anula, *f* é positiva ou *f* é negativa. O estudo pode ser feito de duas formas: algebricamente ou graficamente.
Assim temos:

- ❑ Se a > 0, a função é crescente
  $y > 0$, $x > -\frac{b}{a}$
  $y < 0$, $x < -\frac{b}{a}$

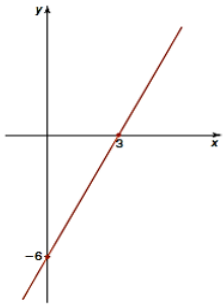
- ❑ Se a < 0, a função é decrescente
  $y > 0$, $x < -\frac{b}{a}$
  $y < 0$, $x > -\frac{b}{a}$

Exemplo:

Exemplo 1

Vamos estudar o sinal da função
$f(x) = 2x - 6$.

Graficamente:

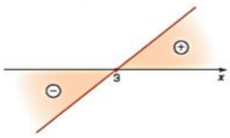


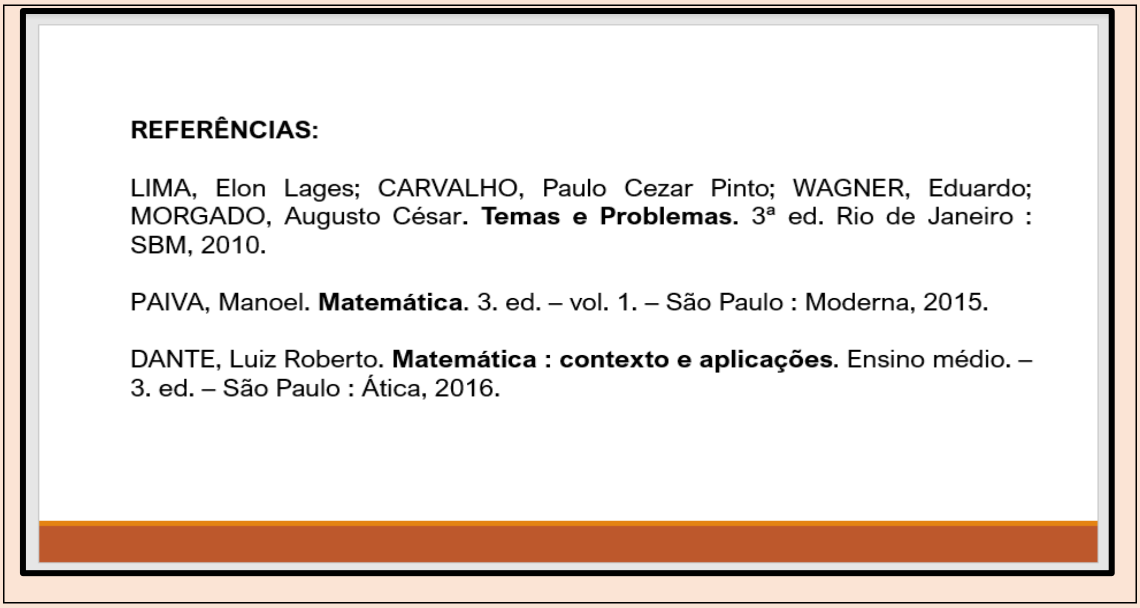
- 3 é raiz da função *f*;
- *f* é crescente;
- para qualquer *x* real, com $x > 3$, temos $f(x) > 0$;
- para qualquer *x* real, com $x < 3$, temos $f(x) < 0$;

Algebricamente:

- a raiz da função *f* é dada por:
  $$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$
- os valores de *x* para os quais *f* é positiva são dados por:
  $$2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$$
- os valores de *x* para os quais *f* é negativa são dados por:
  $$2x - 6 < 0 \Rightarrow x < 3$$

Podemos representar o estudo do sinal dessa função no seguinte esquema:

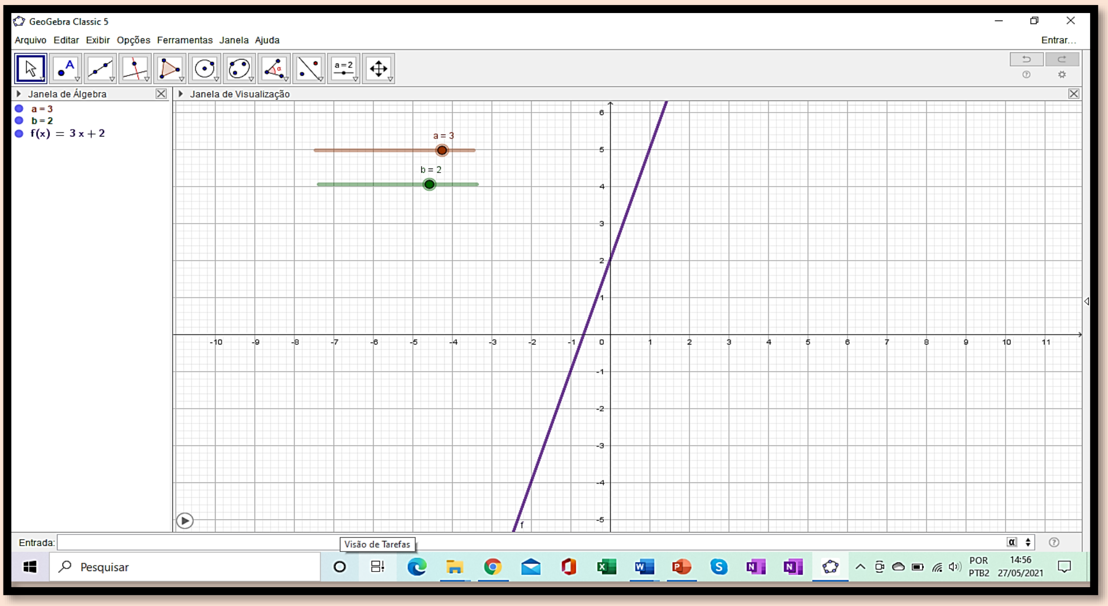




Fonte: Elaborada pela autora (2021).

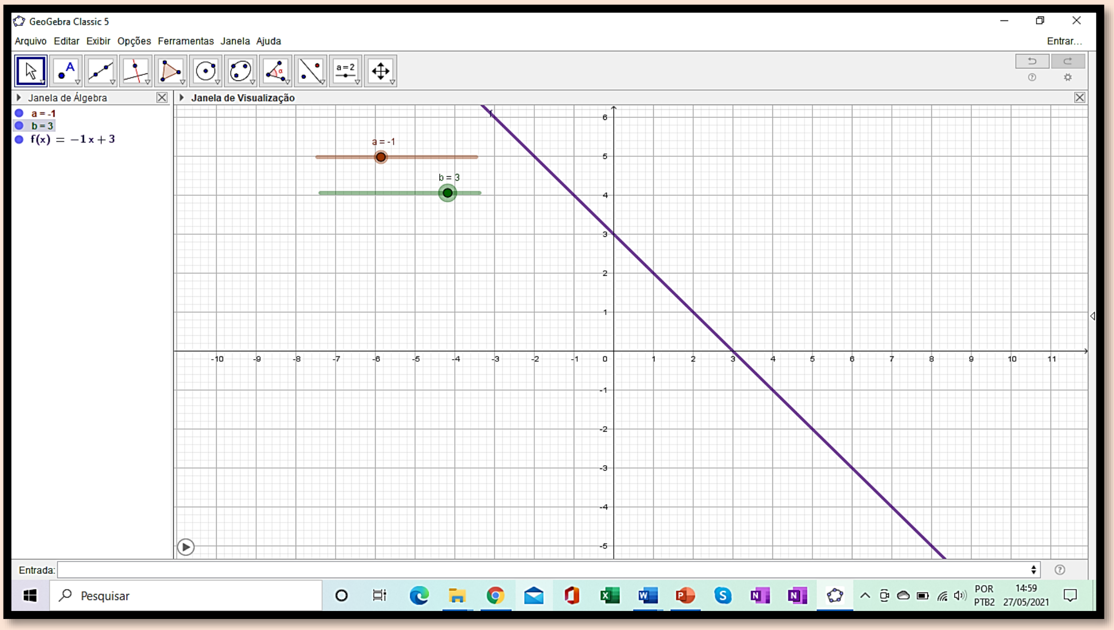
Nas figuras 12 e 13, mostram os comportamentos gráficos da Função Afim de acordo com seus coeficientes, a e b, observados a partir da utilização do aplicativo GeoGebra.

Figura 12 – Comportamento gráfico da Função Afim, visto através do aplicativo GeoGebra



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Figura 13 – Comportamento gráfico da Função Afim visto através do aplicativo GeoGebra



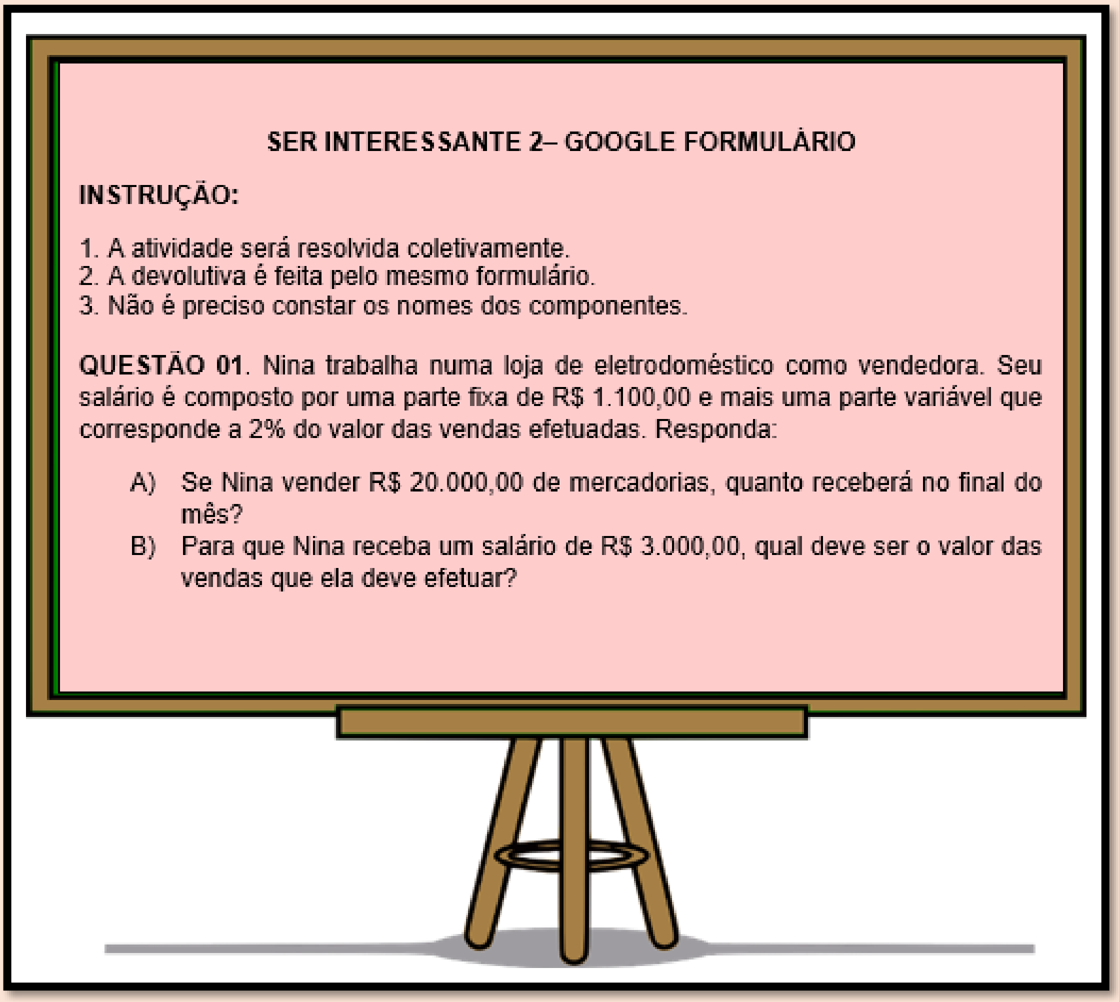
Fonte: Elaborada pela autora (2021).

6º passo: Quadro "Ser Interessante"

É qualificado por uma questão matemática interessante, para que os estudantes possam analisar e resolver, com o objetivo de instigar o raciocínio lógico-interpretativo, a integração, a percepção e a compreensão para resolução de problemas do cotidiano. A tarefa foi disponibilizada no Google Formulário e resolvida coletivamente, com o intuito de assimilarem e compartilharem saberes. Essa atividade que integra os estudantes por meio da análise, discussão, descrição, elaboração de possibilidades, estruturação e resolução.

Assim, a atividade é caracterizada por eixos interativos e dialógicos, como podemos visualizar na figura 14.

Figura 14 – Questão matemática 2: ampliando saberes



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Em relação a atividade trabalhada, fundamentamo-nos no processo de ensino e aprendizagem coletiva, com o intuito de proporcionar novas formas de interação, moldado na natureza da comunicação e na resolução de problemas.

7º PASSO: ENCERRAMENTO DO ENCONTRO

Concluímos o encontro, destacando a importância da temática abordada para o processo de aprendizagem e a relação contextual com o cotidiano, envolvendo trocas de experiências, interações e diálogos. Assim, registramos as observações e comentários dos estudantes, os quais contribuíram para elaboração de atividades subsequentes.

3º ENCONTRO: FUNÇÃO QUADRÁTICA: UM OLHAR SORRIDENTE E PARABÓLICO

> *"A concepção do conhecimento e da natureza do que é conhecido impulsiona-nos, porém, para a questão de como proporcionamos o conhecimento, como nós ensinamos, como levamos o estudante a construir a realidade por seus próprios meios" (BRUNER, 2008, p. 17).*

- **OBJETIVO:** Vivenciar problemas que representam os trajetos parabólicos, tento em vista a criatividade e arte de interpretar, ler e desmistificar as codificações de informações para a resolução de problemas.
- **TEMPO**: 2 horas

❖ AÇÕES DESENVOLVIDAS:

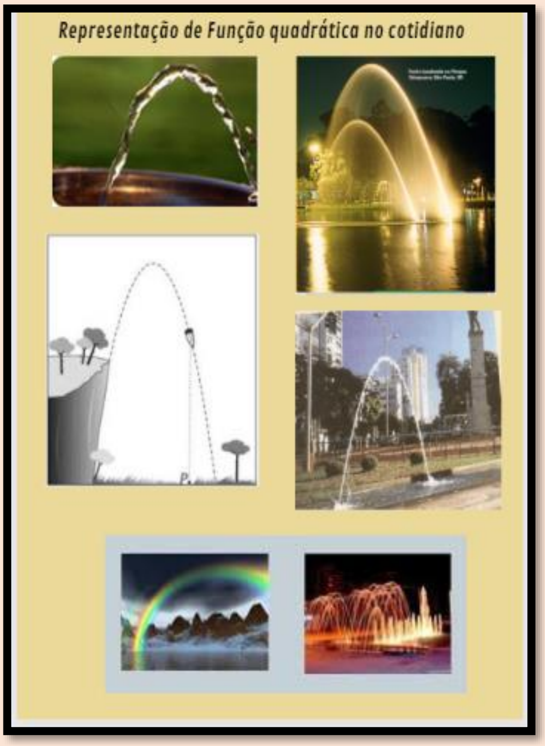
1º PASSO: Nesta fase, a música de abertura ficou por conta da Equipe A, destacando o protagonismo cultural, as formas de pensar, agir e se ver o mundo, como seres protagonistas e históricos de seus espaços. Esse tipo de atividade ascende ao pensamento investigativo e proporciona o respeito à diversidade cultural. Nesse enfoque, esclarecemos a relação da música com a matemática, como exemplo as notas de uma escala musical.

2º PASSO: QUADRO "CONHECER E DESCOBRIR"

Para tratarmos desta etapa, construímos um painel virtual contendo informações, fotos, esculturas, monumentos, desenhos, gravuras, situações vivenciais e eventos, que se identificassem com a representação tanto visual quanto existencial da Função Quadrática, delineando o processo de investigação por descoberta, e, descobrindo novos horizontes. A elaboração dessa atividade beneficia a socialização dos saberes entre os participantes; realizamos por meio da plataforma digital Canva, instigando e ampliando a cultura de conhecimentos. No quadro 8, apresentamos alguns pôsteres construímos pelos discentes.

Quadro 8 – Pôsteres produzidos pelos estudantes

PÔSTER 1



PÔSTER 2

PÔSTER 3

PÔSTER 4

Fonte: Canva. Disponível em: https://www.canva.com/design/DAEeRufrJc0/share/preview?token=yUDKd7tuINzYrVLGRzjTOA&role=EDITOR&utm_content=DAEeRufrJc0&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=sharebutton

O desenvolvimento da atividade serve de suporte pedagógico para compreender o processo de aquisição do conhecimento e verificar o volume de informações adquiridas pelos estudantes acerca do conteúdo previsto, e, possibilitar a elaboração de novas estratégias. De acordo com Bruner (2006, p. 77), as imagens servem para enriquecer o processo de aprendizagem, colaborando no desenvolvimento da percepção em matemática, pois, representa um exemplo livre de abstração e criatividade.

3º passo: Abrilhantando o conhecimento

Para dinamizar este momento de aprendizagem, trouxemos para a sala de aula uma representação concreta, real e aplicativa expondo uma miniatura no formato de uma ponte, possibilitando estudo de elementos da Função Quadrática, como a curvatura chamada de parábola, valor de mínimo, valor de máximo e vértice da parábola. O estudo viabilizou também, a realização de outras análises que decorreram durante o processo de apresentação, destacando a visualização de objetos e imagens que descrevem formas representativas de parábolas. Na figura 15, expomos um protótipo para o estudo de Função Quadrática.

Figura 15 – Protótipo de uma ponte

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Acerca da figura simbólica, Bruner (2006, p. 77), destaca que é uma maneira de estimular a aprendizagem, onde o estudante aprende a lidar com as propriedades formal e abstrata dos objetos de forma livre, permitindo “[...] trabalhar no nível da heurística, através de meios convenientes e não rigorosos de explorar problemas e relacioná-los aos problemas já dominados".

4º passo: Exposição do conteúdo de Função Quadrática.

Desenvolvemos este momento com a exploração da temática, evidenciando a socialização, através de debates, observações e questionamentos, contribuindo dessa maneira, para o processo de aprendizagem com significado, o qual, apresentamos por meio do Google Meet.

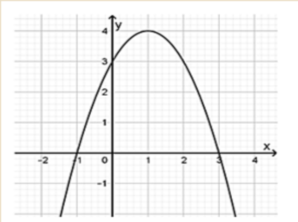
No quadro 9, apresentamos um resumo de Função quadrática. É importante salientarmos que alguns pontos não foram mostrados nos slides, mas trabalhamos no decorrer das explicações com o aprofundamento do conhecimento.

Quadro 9 – Resumo de Função Quadrática

1. DEFINIÇÃO:

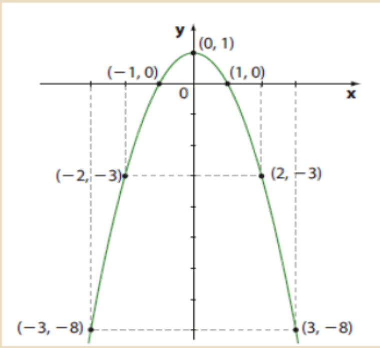
Qualquer função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ é chamada de função quadrática (LIMA, 2006). Essa função relaciona cada número real x com o número real $ax^2 + bx + c$, onde a, b, e c são constantes reais e $a \neq 0$.

O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada parábola. Veja o gráfico da função quadrática f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$:



Outro exemplo:
Consideremos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 1$.
Vejamos:

x	$y = -x^2 + 1$
−3	−8
−2	−3
−1	0
0	1
1	0
2	−3
3	−8



2. RAÍZES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU:

Chamam-se **raízes** ou **zeros da função polinomial do 2º grau**, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais **x** tais que $f(x) = 0$.

A resolução da equação do 2º grau é realizada por meio da fórmula de Bháskara. Daí, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em que:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ab}$$

3. A QUANTIDADE DE RAÍZES DA FUNÇÃO DO 2° GRAU:

As raízes de uma função quadrática são os valores de **x** para os quais $y = ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, são as abscissas dos pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ab$, denominado de **discriminante.**

Então, vejamos:

- Se $\Delta > 0$, *temos duas raízes reais distintas.*
- Se $\Delta = 0$, *temos duas raízes reais e iguais ou uma única raiz real.*
- Se $\Delta < 0$, *não existe raiz real.*

Exemplo:

Vamos obter os zeros da função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
Temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

As raízes são 2 e 3.

4. SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES:

Sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$.

Então:

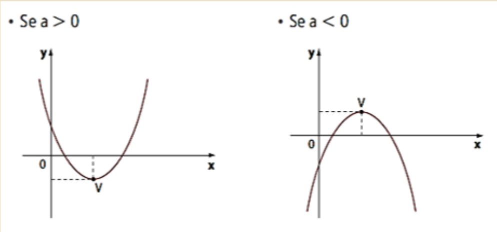
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Vamos pensar!
Quanto vale a soma e o produto da equação do 2° grau:
$x^2 - 6x + 8 = 0$?

5. COORDENADA DO VÉRTICE DA PARÁBOLA:

- Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo **V**.
- Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo **V**.



Assim, teremos:

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

6. CONJUNTO IMAGEM:

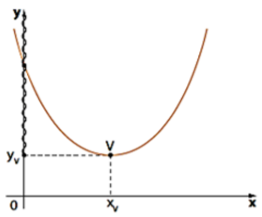
O conjunto imagem Im da função definida por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que **y** pode assumir. Há duas possibilidades:

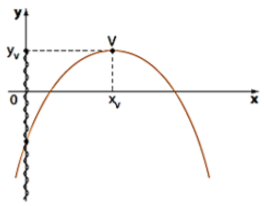
• Se $a > 0$

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq y_v = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

• Se $a < 0$

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \leq y_v = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$





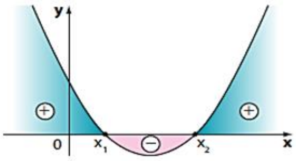
7.ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA:

Dada a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, vamos determinar os valores de **x** para os quais **y** é negativo e os valores de **x** para os quais **y** é positivo.

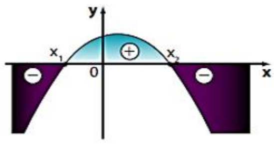
Em concordância com o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podem ocorrer os seguintes casos:

$\Delta > 0$

Nesse caso, a função quadrática admite duas raízes reais distintas ($x_1 \neq x_2$). A parábola intersecta o eixo Ox em dois pontos, e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



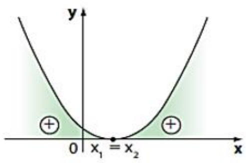
$a > 0$
$y > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



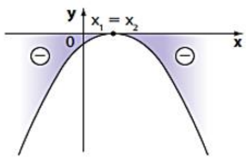
$a < 0$
$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

$\Delta = 0$

Nesse caso a função quadrática admite duas raízes reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo Ox, isto é, intersecta o eixo em um único ponto, e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



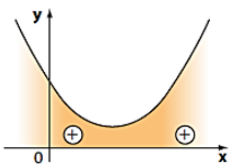
$a > 0$
$y > 0, \forall x \neq x_1$
$\nexists x$ tal que $y < 0$



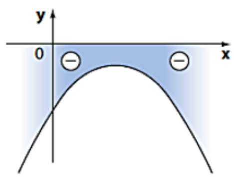
$a < 0$
$y < 0, \forall x \neq x_1$
$\nexists x$ tal que $y > 0$

$\Delta < 0$

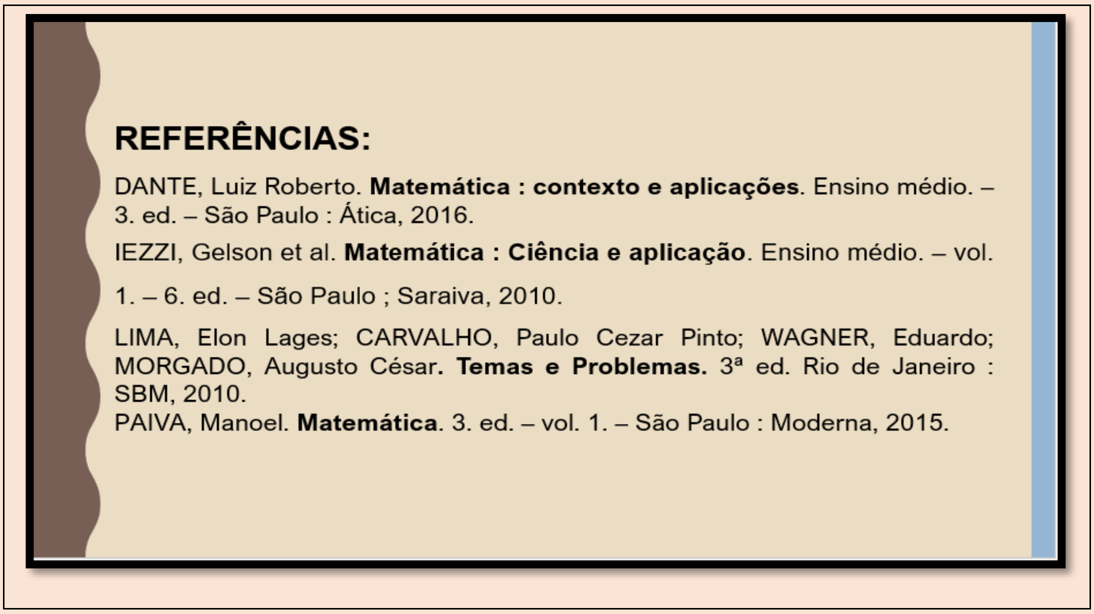
Nesse caso, a função quadrática não admite raízes reais. A parábola não intersecta o eixo Ox e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



$a > 0$
$y > 0, \forall x$
$\nexists x$ tal que $y < 0$



$a < 0$
$y < 0, \forall x$
$\nexists x$ tal que $y > 0$



REFERÊNCIAS:

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática : contexto e aplicações**. Ensino médio. – 3. ed. – São Paulo : Ática, 2016.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática : Ciência e aplicação**. Ensino médio. – vol. 1. – 6. ed. – São Paulo ; Saraiva, 2010.

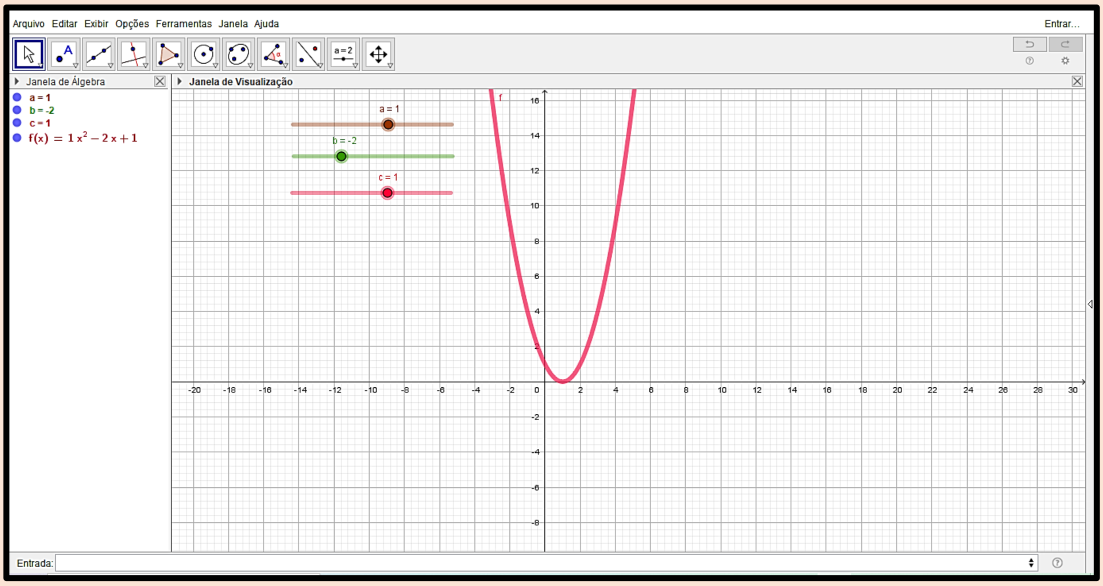
LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas.** 3ª ed. Rio de Janeiro : SBM, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 3. ed. – vol. 1. – São Paulo : Moderna, 2015.

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

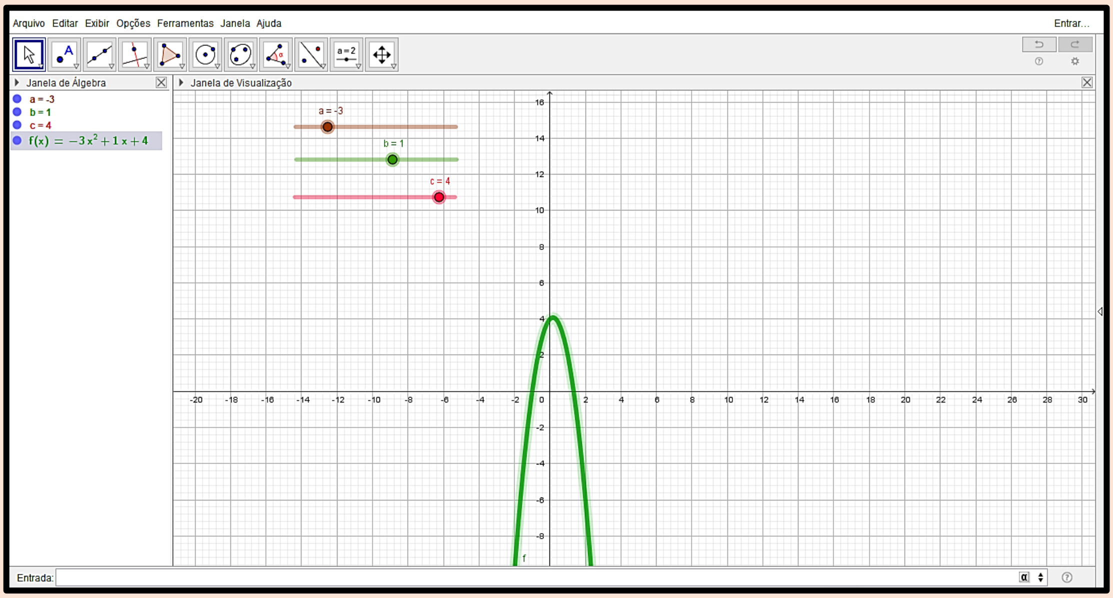
Para completarmos o estudo da Função Quadrática usamos o software GeoGebra, com o intuito de verificarmos o comportamento gráfico e proporcionar o entendimento da concavidade da parábola, quando: $a\ > 0\ e\ a\ < 0$); assim, exemplificamos utilizando valores diferentes, sendo substituídos na forma $f(x) =\ ax^2 + ax + c$. Nas figuras 16 e 17, explanamos o comportamento de Função Quadrática, com base no sinal do $coeficiente\ a\ (a > 0\ \ e\ a\ < 0)$.

Figura 16 - Concavidade da parábola da Função Quadrática quando $a\ > 0$.



Fonte: elaborada pela autora (2021).

Figura 17 - Concavidade da parábola da Função Quadrática quando $a < 0$.

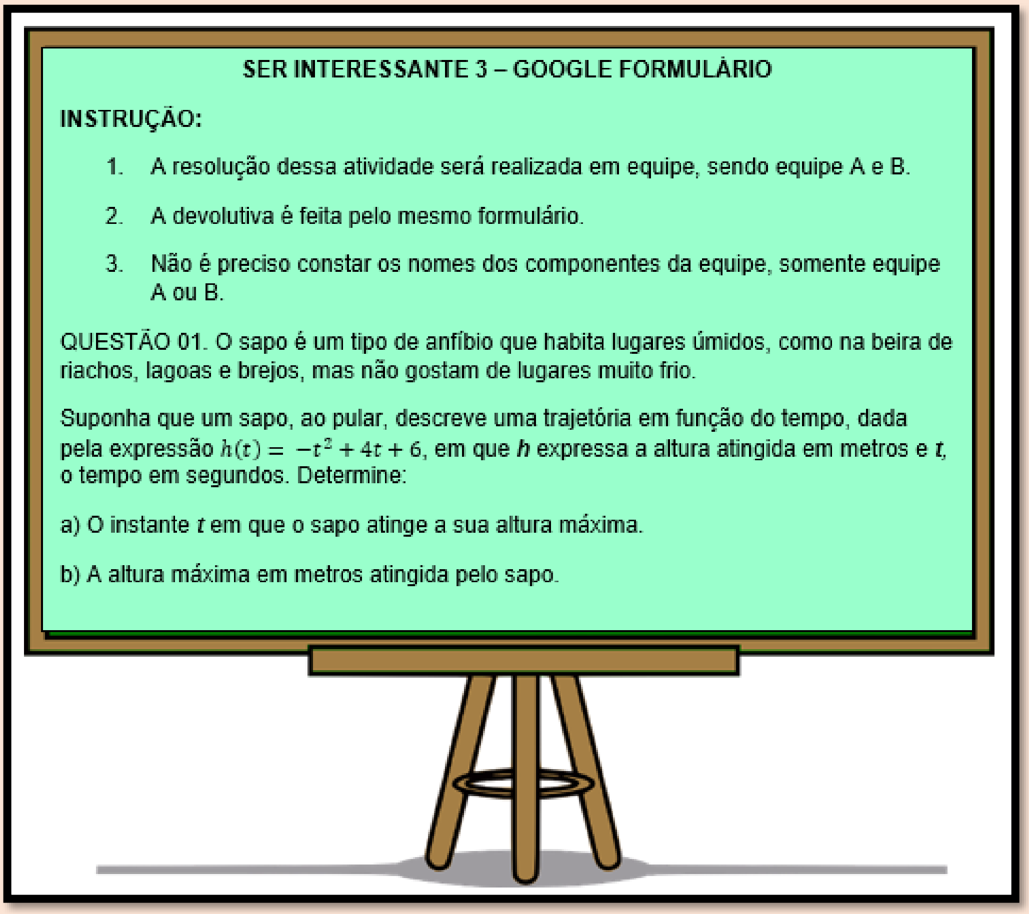


Fonte: elaborada pela autora (2021).

5º passo: Quadro "Ser Interessante"

Definido por uma questão matemática interessante, para analisar e resolver, postado no Google Formulário. Trabalhamos esta atividade de forma coletiva, tendo como objetivo o compartilhamento de conhecimentos, amadurecimento das ideias, criatividade, planejamento e estratégias interpretativas para resolução de problemas. Tal contexto, pode ser observado na figura 18.

Figura 18 – Questão matemática 3: ampliando saberes



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Nesse estudo, os estudantes são encorajados a desenvolverem diferentes habilidades para a resolução de problemas, exercendo suas potencialidades críticas e analíticas, e, convidados a revisitarem alguns conteúdos já vistos, tais como: as quatro operações fundamentais e a Fórmula de Bhaskara[2].

6º passo: Curtindo a aprendizagem

É caracterizado por um momento de diversão, criatividade, aperfeiçoamento e aprendizagem, delineado por meio de uma atividade lúdica, onde os estudantes vão exercitar o raciocínio lógico, interpretativo e resolutivo.

[2] Fórmula de Bhaskara é um método resolutivo para as equações do segundo grau: o nome se deve ao matemático, astrônomo e astrólogo indiano Bhaskara Akaria (1114-1185).

❖ Estratégia da atividade

1. Jogo de estratégia, desfio e conhecimento:

A atividade é desenvolvida através de uma estratégica lúdica, denominada “Remexo da função quadrática”.

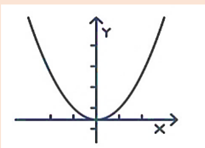
Composição:

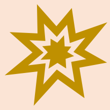
- Constituído por 20 cartões, com perguntas e respostas, podendo retomar aos conhecimentos anteriores sempre que necessário.
- É vencedor quem primeiro eliminar os seus cartões e responder corretamente.
- Os estudantes são divididos em dois grupos, A e B.
- O tempo limite para responder cada pergunta, é de 2 a 3 min.

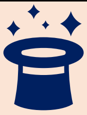
Objetivo: A finalidade dessa estratégica, é fazer o discente recordar de forma dinâmica e criativa o conteúdo abordado, com vista numa aprendizagem comprometida com o desempenho intelectual e pessoal, seguindo princípios de respeito e coletividade.

Na figura 19, exibimos a atividade trabalhada com os estudantes, onde destacamos a promoção do diálogo matemático, valorização do pensamento, desenvolvimento de potencialidades, a tomada de decisões e o respeito. Desse modo, entendemos que são elementos essenciais para o processo de aprendizagem coletiva e com significados.

Figura 19 – Atividade lúdica 1

	**Os zeros da função: f(x) = $x^2 - 8x + 7$**	**S = {1,7}**	**Curva da função quadrática**
A fórmula de Bhaskara	**175**	**O custo de um produto é calculado: $C(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 8x + 100$, quanto será o custo para a produção de 25 canetas?**	**Parábola**

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\Delta > 0$	Duas raízes reais distintas	Vértices da parábola
$(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$	Uma pedra, lançada ao nível do solo, atingindo altura máxima, em metros, descrevendo a função: $f(t) = -t^2 + 3t$. A altura máxima vale:	2,25	 Oba, jogue mais uma vez!
a > 0	Em que ponto o gráfico da função f(x) = – x^2 + 4x – 3, intercepta o eixo das ordenadas?	(0, - 3)	A função f(x)=2x²-10x+21 possui concavidade voltada para cima ou para baixo?
Concavidade para cima	Qual a condição necessária para a qual a função f(x)= ax²+bx+c, sendo a, b e c números reais, seja do segundo grau?	“a” tem que ser diferente de zero	 Ah, passe a vez!
 (Bônus) Peça ajuda a alguém para resolver uma questão.	Quais as coordenadas do vértice da parábola $y = x^2 - 6x + 8$?	$(3, -1)$	Seja $f(x) = -x^2 + 22x + 1$, qual o valor de $f(-2)$?
-47	Considere a função f(x) = 2x² + 3x – 10. Qual o valor da soma $a + b + c$?	- 5	Qual a soma das raízes da função f(x) = x²+ 16x + 39?
- 16	A função f(x) = x²- 4x + k tem o valor mínimo igual a 8. Qual o valor de k?	12	 Está com sorte, jogue duas vezes consecutivas.

 **Ah, passe a vez.**	 **Bravo, continue jogando!**	 **(Bônus) Peça ajuda a alguém para resolver uma questão.**	 **Bravo, continue jogando!**

Fonte: elaborada pela autora (2021).

Considerando o pensamento de Bruner (1999), a atividade lúdica aplicada no contexto escolar, explora diferentes alternativas de ensino, tornando acessível e interessante o conhecimento para os estudantes. Desse modo, D’Ávila e Fortuna (2018) apontam a ludicidade como uma atividade humana que possui caracterização social e cultural por apresentar uma natureza livre e espontânea, onde os estudantes aprendem explorando novos contextos. Nesse ponto, Lorenzato (2010) aponta que o material didático é um instrumento que auxilia no processo de ensino e aprendizagem, mostrando novas possibilidades para a criação e elaboração de estratégias para o entendimento e armazenamento das informações apreendidas no contexto matemático.

7º passo: Encerramento do encontro

Finalizamos enfatizando a importância do estudo de Função quadrática para o processo de aprendizagem, e da ressignificação da teoria e da prática para o desenvolvimento de potencialidades. Em seguida, agradecemos pelos comentários e participação dos estudantes, onde evidenciamos o protagonismo e desenvolvimento de novos olhares para com a cultura matemática.

4º ENCONTRO: FUNÇÃO MODULAR: UM "V" PARA AVENTURAR O CONHECIMENTO

> *"A singularidade mais característica dos seres humanos é aprenderem. A aprendizagem está tão profundamente arraigada no homem que é quase involuntária [...]" (BRUNER, 1999, p. 142).*

- **OBJETIVO:** Conhecer as aplicações operatórias do estudo das equações modulares e as trajetórias modulares no voo dos gansos.
- **TEMPO**: 2 horas
- **AÇÕES DESENVOLVIDAS:**

1º PASSO: Introduzimos o encontro com uma música apresentada pela equipe B ressaltando a importância do papel da juventude e a sua estação cultural, contada por meio de um estilo musical, conferindo-se a leitura de mundo. De acordo com Freire (1996, p. 119), escutar "[...] significa a disponibilidade permanente por parte do sujeito que escuta para a abertura à fala do outro, ao gosto do outro, às diferenças do outro".

2º PASSO: LEITURA E DESCOBERTA

"Os mistérios dos gansos em V" (Texto matemático de Ian Stewart, resolvido por Hemlock Soames e o Dr. Watsup, Tradução de George Schelessinger).

Texto: Os mistérios dos gansos em V

Bandos de aves migratórias com frequência voam em formação de V. Revoadas de gansos voando em V são bem familiares, e muitas contêm dezenas e até mesmo centenas de pássaros. O que faz com que adotem essa forma?

Há muito tempo, pesquisadores têm sugerido que essa formação poupa energia evitando que os pássaros sejam apanhados na esteira de turbulência daqueles que estão na frente, e recentes estudos teóricos e experimentais vêm confirmando esse ponto de vista geral. Mas essa teoria baseia-se no fato de as aves serem capazes de sentir correntes de ar e ajustar seu voo de acordo com elas, e até recentemente ainda não estava claro se elas conseguem fazê-lo.

Uma explicação alternativa é que o bando tem um líder, a ave que está na frente, e todo mundo o segue. Talvez ele seja um navegador melhor, aquele que sabe aonde ir. Ou seja, apenas a ave que está na frente.

Aves voando em formação de V da direita para a esquerda. A maioria delas. Aonde é que vai o pássaro no alto à direita? Existe sempre um...

Antes de prosseguir para a resposta, precisamos compreender algumas características básicas do voo das aves. Num voo uniforme, a ave bate as asas num ciclo repetitivo, uma batida para baixo seguida de uma batida para cima. Ela ganha sustentação com a batida para baixo, na medida em que vórtices de ar saem girando das bordas das asas, e a batida para cima é usada para voltar as asas para a posição original, de modo que o ciclo possa ser repetido. A duração do ciclo é chamada período.

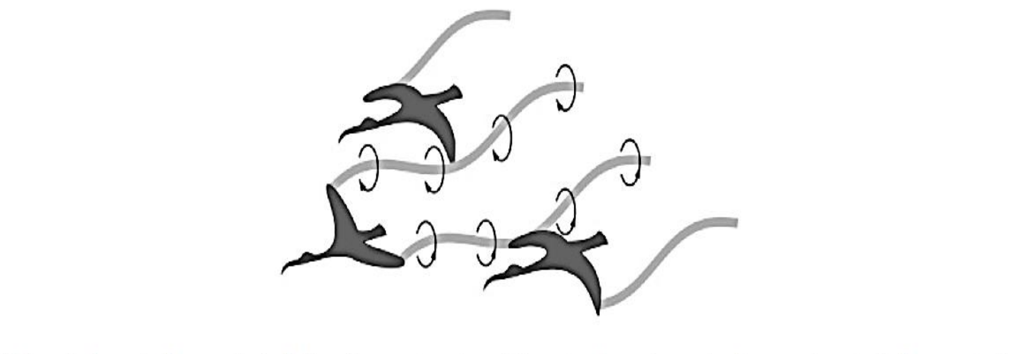
Suponha que duas aves estejam voando usando ciclos de mesmo período, que é praticamente o que acontece em um bando migratório. Embora elas se movam da mesma maneira, não é necessário que façam os mesmos movimentos ao mesmo tempo. Por exemplo, quando uma ave está executando uma batida para baixo, a outra pode estar numa batida para cima. A relação entre o estágio das batidas de ambas é chamada de fase relativa, e é a fração do ciclo entre o instante em que a primeira ave começa a batida para baixo e o instante em que a outra começa essa mesma batida.

Graças a um notável trabalho de detetive feito por Steven Portugal e sua equipe, agora sabemos que a teoria de poupar energia está correta, *e* que as aves podem, efetivamente, sentir as correntes invisíveis de ar bem como o bastante para fazê-lo. O grande problema para estudos experimentais é que as aves que você tenta observar desaparecem rapidamente de vista, junto com qualquer equipamento preso a elas.

Aí entra o íbis-eremita.

Houve um tempo em que existiam tantos íbis-eremitas que os antigos egípcios usavam uma imagem estilizada dele como o hieróglifo para *akh*, que significa “brilhar”. Hoje sobrevivem apenas umas poucas centenas, sobretudo no Marrocos. Por esse motivo, foi elaborado um programa de criação em cativeiro em um zoológico de Viena. Muito esforço é dedicado a ensinar as aves a seguir as rotas de migração corretas. Isso é feito treinando-as a seguir um aeroplano ultraleve, que é enviado para voar ao longo de partes das rotas – mas também volta para a base, junto com as aves.

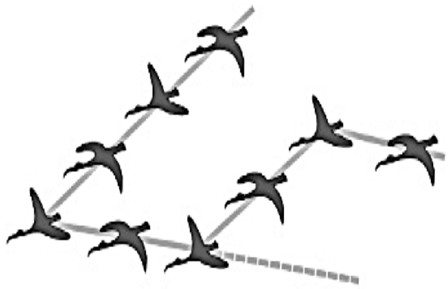
Portugal percebeu que seria possível fazer medidas extensivas das posições dos pássaros, e a forma como movem as asas, a partir do ultraleve. Em vez de as aves desaparecerem no horizonte, elas ficam perto do equipamento. O que sua equipe descobriu foi espantoso e elegante. Cada pássaro se posiciona atrás e ligeiramente ao lado do que está na frente e ajusta a fase relativa da sua batida de asas de modo a planar sobre a corrente ascendente criada pelo vórtice provocado pelo pássaro da frente. O segundo pássaro não deve apenas ajustar a ponta da sua asa no local certo, que é relativamente minúsculo, mas também ajustar a fase da sua batida de asas de modo a explorar a corrente ascendente de maneira eficiente.



Colocação da ponta da asa e ajuste de fase. Curvas cinzentas: vórtices gerados pelas pontas das asas. As setas indicam a rotação do vórtice.

À primeira vista essas considerações também permitiriam uma formação em zigue-zague, na qual cada ave voa de um lado do pássaro à frente, mas sem formar um V. (Ele tem escolha de voar à direita ou à esquerda.) No entanto, o primeiro pássaro a quebrar a formação em V (digamos voando à direita do pássaro à frente em vez de voar do lado externo do V, à esquerda) estaria diretamente atrás do pássaro duas filas à frente. O ar ali estaria turbulento, perturbado pelo pássaro logo à frente, de modo que seria muito mais difícil conseguir sustentação colocando a ponta da asa de maneira correta. Esse problema é evitado voando do lado de fora do V, onde não há perturbação do ar.

Também seria possível que os pássaros formassem uma única linha diagonal, como um dos braços do V. Mas isso deixaria lugar para que pássaros ocupassem o outro braço, mais perto do líder. Contudo, é comum um dos braços do V ser maior que o outro.



Por que não voar numa formação em zigue-zague mais complexa, como esta, ou algo similar ainda mais tortuoso?

Em experimentos com íbis, levou-se algum tempo para que os pássaros mais jovens aprendessem como se posicionar. Na prática, alguns podem se enganar e o V raramente é perfeito. Não obstante, os experimentos detalhados mostram de modo conclusivo que os íbis são capazes de sentir o fluxo de ar suficientemente bem para se posicionarem na localização mais eficiente em termos de energia, ou perto dela, em relação ao pássaro da frente.

Comentário:

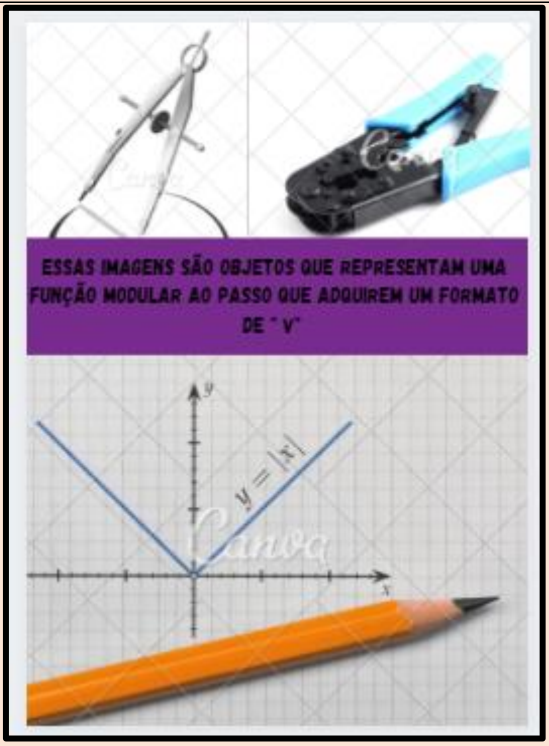
O texto nos convida a uma leitura curiosa e dinâmica, mostrando o porquê de os gansos voarem num formato de “V”, destacando o cuidado com o outro, companheirismo, respeito, importância do trabalho coletivo e em equipe, além de conter explicações no aspecto físico e filosófico. Assim, a leitura matemática ressignifica o contexto escolar, trazendo novas discussões, reflexões e embelezando a estruturação da prática pedagógica.

3º passo: Quadro "Conhecer e descobrir"

Neste episódio, destacamos informações e situações que determinem o formato de "V", como: figuras, imagens, fotos e relatos que sejam baseados no contexto vivencial, tendo em vista o abrilhantamento da Matemática para o ensino investigativo por descoberta.

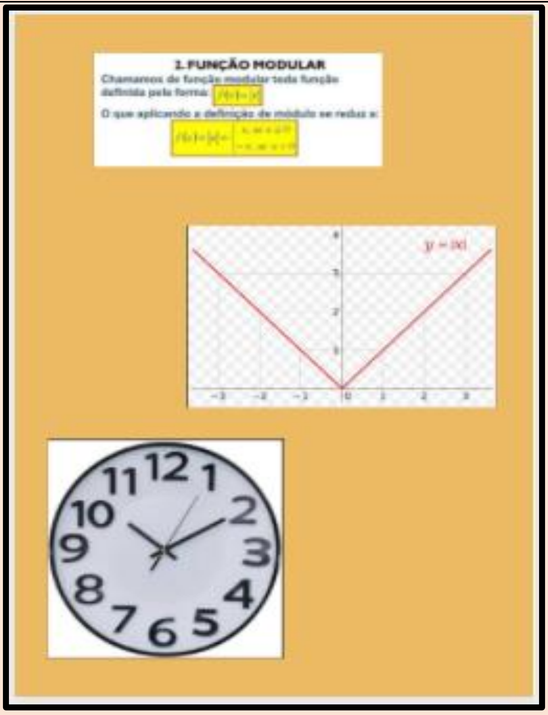
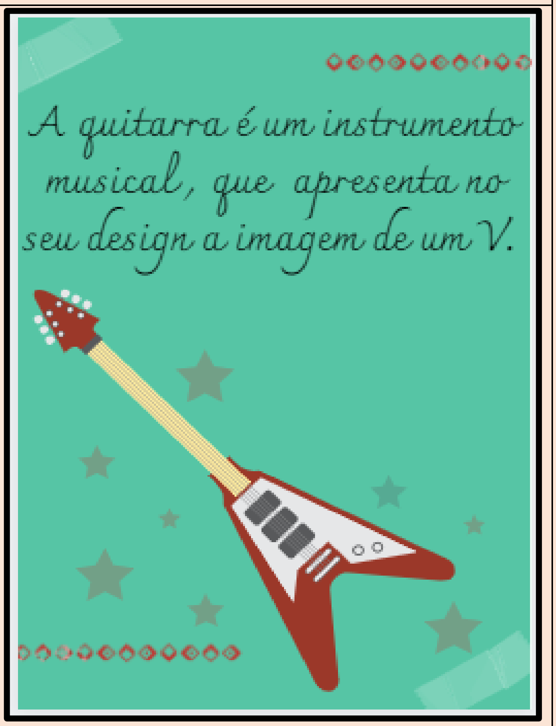
Para esse quadro de conhecimento, trataremos de informações importantes para a discussão, análise, encantamento e construção de novos saberes. Em referência à confecção da atividade, utilizamos a plataforma digital CANVA, possibilitando a interação e a socialização de conhecimento. Assim, no quadro 10, expomos os trabalhos confeccionados pelos estudantes.

Quadro 10 – Pôsteres produzidos pelos estudantes



Pôster 1

Pôster 2

 Pôster 3	 Pôster 4
 Pôster 5	 Pôster 6

Fonte: Canva. Link de acesso: https://www.canva.com/design/DAEedwcCZgI/share/preview?token=S1-AF7wG3IAyXD_vHfwOUQ&role=EDITOR&utm_content=DAEedwcCZgI&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=sharebutton

A execução dessa tarefa permitiu aos estudantes vivenciarem diversas experiências, possibilitando o compartilhamento de saberes e apropriação do conhecimento.

4º passo: Aula dialogada sobre a Função Modular

A apresentação ocorreu pelo Google Meet, por meio de slides, descrevendo um momento de conversação, troca de ideias, questionamentos e construção de conhecimento, em que evidenciamos novas proposições, modelos, interpretações e saberes, para o desencadeamento de uma cultura matemática prazerosa, atrativa e fascinante. À medida que o conteúdo foi abordado, descrevemos situações do cotidiano envolvendo o assunto, com o intuito de provocar a curiosidade e estimular a criatividade investigativa.

Na visão de Bruner (1996), a curiosidade é uma forma de explorar o conhecimento com satisfação, pois, é uma atividade biologicamente importante para a espécie humana, sendo inerente à sua sobrevivência. Desse modo, o autor (1996) destaca a importância da curiosidade para o processo de descoberta, enfatizando o papel do discente na construção do seu próprio saber.

Nesse aspecto, Freire (1996) menciona que a curiosidade deve promover a capacidade de aprender criticamente, aguçando o gosto pela aprendizagem, arriscando-se e aventurando-se nos percursos conhecimento, além de associar a outros saberes. Para o autor (1996, 55), "[...] a curiosidade é já conhecimento". Assim, a curiosidade e a criatividade trilham juntos no embarque da instrução.

Desse modo, expomos no quadro 11, um resumo para o estudo de Função Modular no contexto matemático, mas é importante frisarmos que trabalhamos anteriormente essa temática na abordagem cotidiana, tratando-a por meio de exemplos e situações problemas. Diante da nossa apresentação dialogada, fizemos algumas demonstrações das propriedades da Função Modular, com o objetivo de esclarecer o uso aplicativo dentro do objeto de estudo.

Quadro 11 – Resumo de Função Modular

4º PASSO: Explicação de função modular

1. MÓDULO:

Sendo $x \in \mathbb{R}$, define-se **módulo** ou **valor absoluto** de x, que se indica por $|x|$, por meio da relação:

$$\begin{cases} |x| = x & \text{se } x \geq 0 \\ \text{ou} & \\ |x| = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Isso significa que:

1º) o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;

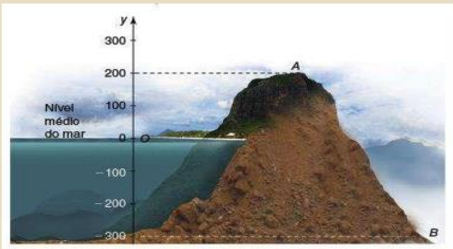
2º) o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

Exemplos:

1. $|-5| = 5$
2. $|6| = 6$
3. $|-3 + 7| = |+4| = 4$
4. $|8| - |-6| = 8 - 6 = 2$

2. APLICAÇÃO DE MÓDULO:

Na figura do lado, a altitude do ponto A é 200m e a altitude de B é − 200m. Observe que a distância d entre cada um desses pontos e o nível médio do mar é a mesma, 200m, porém A está acima do nível médio do mar e B está abaixo.



3. PROPRIEDADES:

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

1ª) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2ª) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3ª) $|x| \cdot |y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

4ª) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

5ª) $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

6ª) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

7ª) $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

8ª) $|x| \leq a$ e $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

9ª) $|x| \geq a$ e $a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

4. FUNÇÃO MODULAR:

É qualquer função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x) = |x| (JORGE 2009). Na função modular a cada número real é associado seu módulo. Pode ser representada da seguinte maneira:

$$f(x) = |x| \leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

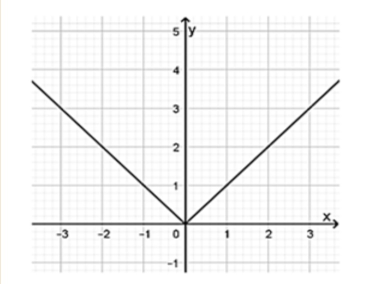
Veja o gráfico dessa função:

F(x) = x, se x ≥ 0

x	f(x)
0	0
1	1

F(x) = - x, se x < 0

x	f(x)
0	0
- 1	1



Assim, o gráfico da função modular é a reunião de duas semi-retas de origem O, que são bissetrizes do 1º e 2º quadrantes. O domínio e a imagem dessa função são, respectivamente, $\mathrm{D} = \mathrm{IR}$ e $Im = IR_+$, isto é, a função modular somente assume valores reais não negativos.

Exemplos:

01. $f(x) = |x - 1|$

02. $f(x) = |2x + 1|$

5. EQUAÇÕES MODULARES:

Notemos uma propriedade do módulo dos números reais:

- $|x| = 2 \Rightarrow |x|^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2$ ou $x = -2$
- $|x| = \frac{3}{7} \Rightarrow |x|^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{49} \Rightarrow x = +\frac{3}{7}$ ou $x = -\frac{3}{7}$

De modo geral, sendo **k** um número real positivo, temos:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

Por exemplo: $|x| = 5 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 5$

Utilizando essa propriedade, vejamos como solucionar algumas equações modulares.

Exemplo:

Questão 01.

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|3x - 1| = 2$.

Solução:

Temos: $|3x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 3x - 1 = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$S = \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$

6. INEQUAÇÕES MODULARES:

Para resolver inequações modulares recorremos algumas propriedades do módulo de um número real, vejamos:

Para $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, temos:

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$

EXEMPLO:

Vamos utilizar a propriedade para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $|x - 1| < 4$.

Devemos ter: $-4 < x - 1 < 4 \Rightarrow -3 < x < 5$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$

REFERÊNCIAS:

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática : contexto e aplicações**. Ensino médio. – 3. ed. – São Paulo : Ática, 2016.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática : Ciência e aplicação**. Ensino médio. – vol. 1. – 6. ed. – São Paulo ; Saraiva, 2010.

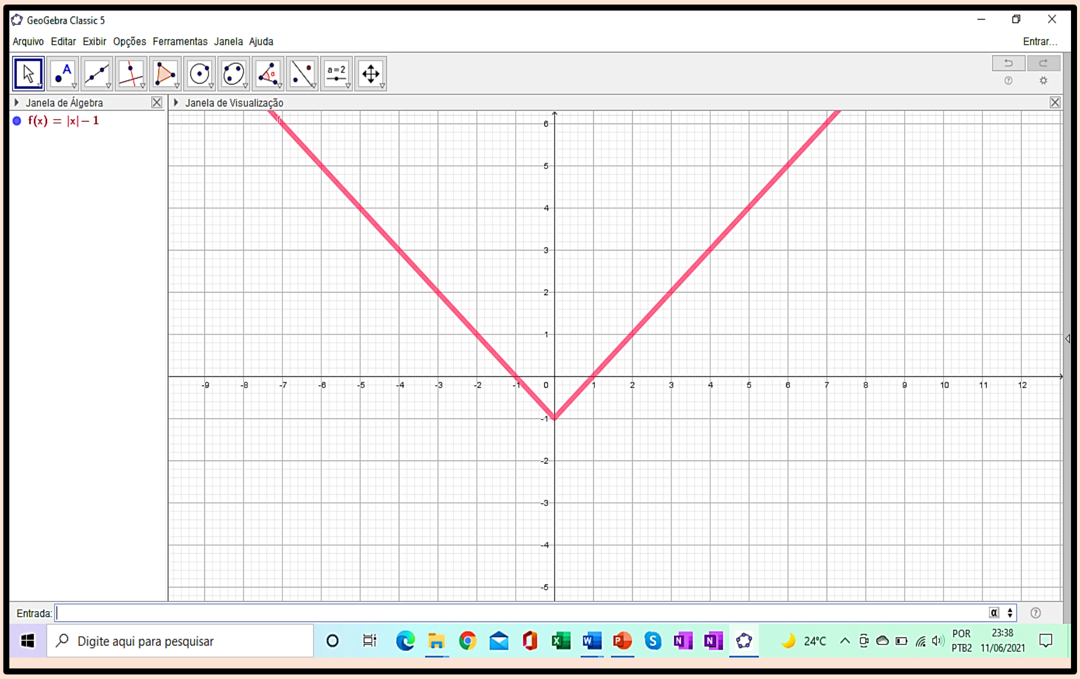
LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas.** 3ª ed. Rio de Janeiro : SBM, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 3. ed. – vol. 1. – São Paulo : Moderna, 2015.

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Com o intuito de esclarecer e dinamizar a atividade, utilizamos o software GeoGebra, descrevendo diferentes situações, viabilizando a interpretação, diálogo, construção e resolução de problemas, concedendo aos estudantes um leque de possibilidades. No quadro 12, apresentamos um exemplo de Função Modular construída a partir de uma lei de formação. Desse modo, explicamos que foram construídos outros exemplos para o entendimento dos estudantes.

Quadro 12 – Função Modular construída no GeoGebra a partir de uma lei de formação



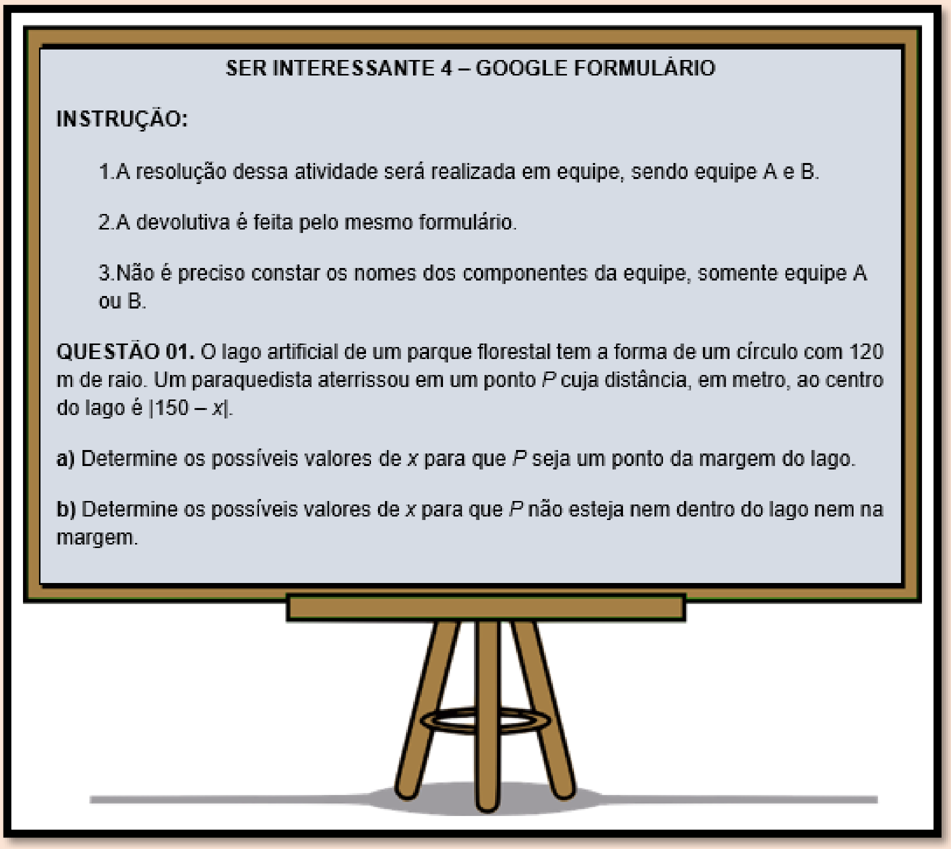
Fonte: elaborada pela autora (2021).

5º passo: Quadro "Ser Interessante"

Exibimos uma questão matemática interessante, como podemos ver na figura 20, com o propósito de clarificar o entendimento de uma situação problema, valendo-nos da análise, interpretação e do raciocínio lógico dedutivo. Disponibilizamos a atividade no Google Formulário.

Para concretização da tarefa, os estudantes foram divididos em dois grupos: A e B. O caminho das resoluções foi trilhado por várias discussões e procedimentos, nos quais destacamos a participação, dedicação, comunicação e integração como fatores cruciais para o levantamento de hipóteses, questionamentos, estruturação e resolução. O objetivo da tarefa é possibilitar aos estudantes o compartilhamento de conhecimentos e construção de saberes matemáticos.

Figura 20 – Questão matemática 4: ampliando saberes



Fonte: elaborada pela autora (2021).

O enunciado dessa atividade nos possibilita vivenciar cenários de comunicação produzidos a partir de uma situação problema, propondo uma visão ampliada em relação ao contexto matemático, moldado pela contextualização e reorganização do pensamento investigativo.

6º passo: Abrilhantando o conhecimento

É um momento de descontração, treino e criatividade. Nesta etapa, a ludicidade é mais uma ferramenta para produção de conhecimento. D'Avila (2018, p. 44) menciona que, "É preciso vivenciar, saborear esse estado interno de ludicidade, como na leitura de um livro ou em outra atividade que se desperte um estado de espírito de divertimento interno e de inteireza do ser".

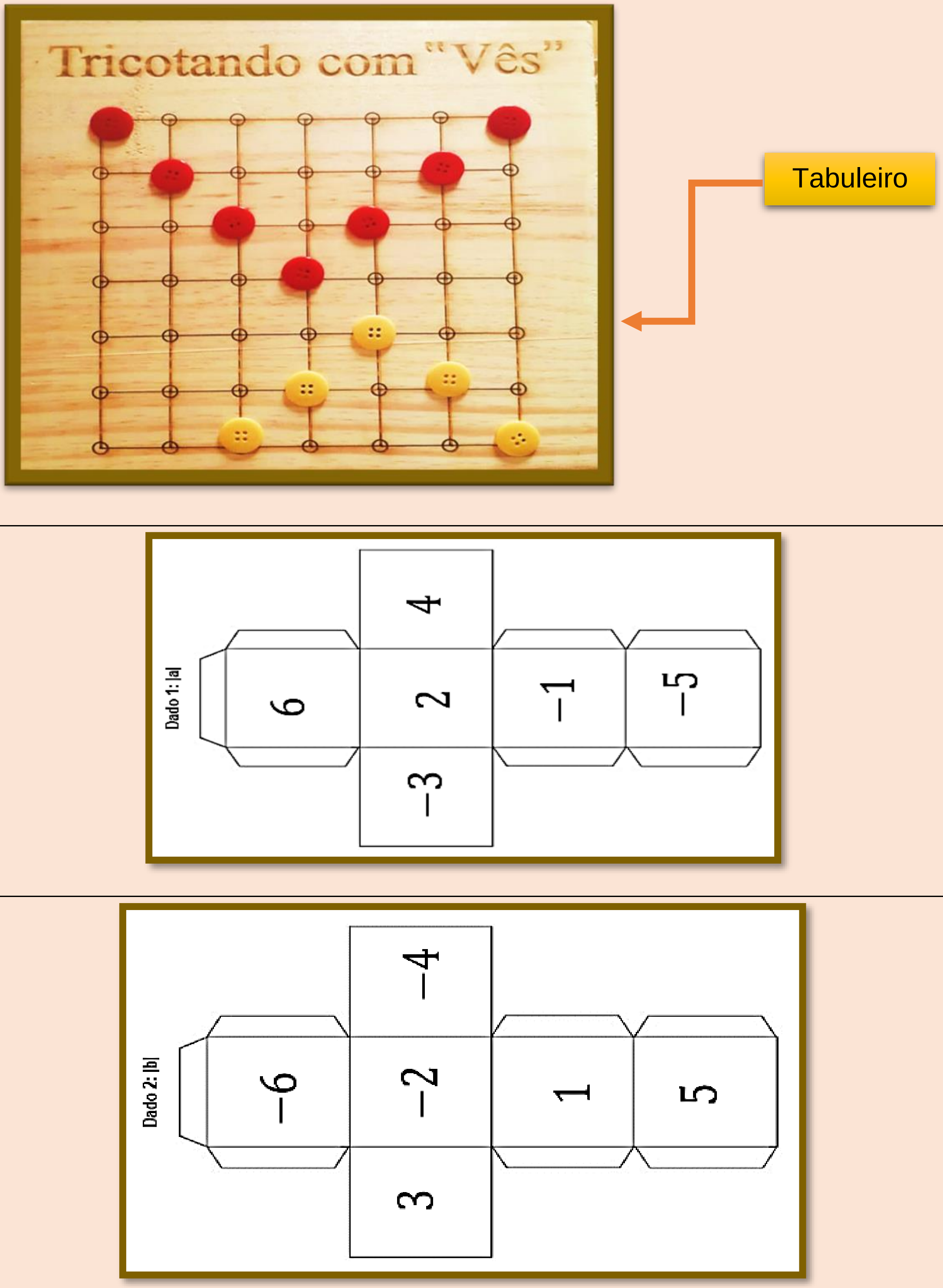
Pois bem, agora apresentaremos o desenvolvimento de uma atividade, partindo da confecção de um tabuleiro denominado "Tricotando com VÊS", para exploração de diferentes alternativas de aprendizagens, conduzidas pela investigação e pela ludicidade.

❖ Estratégia da atividade

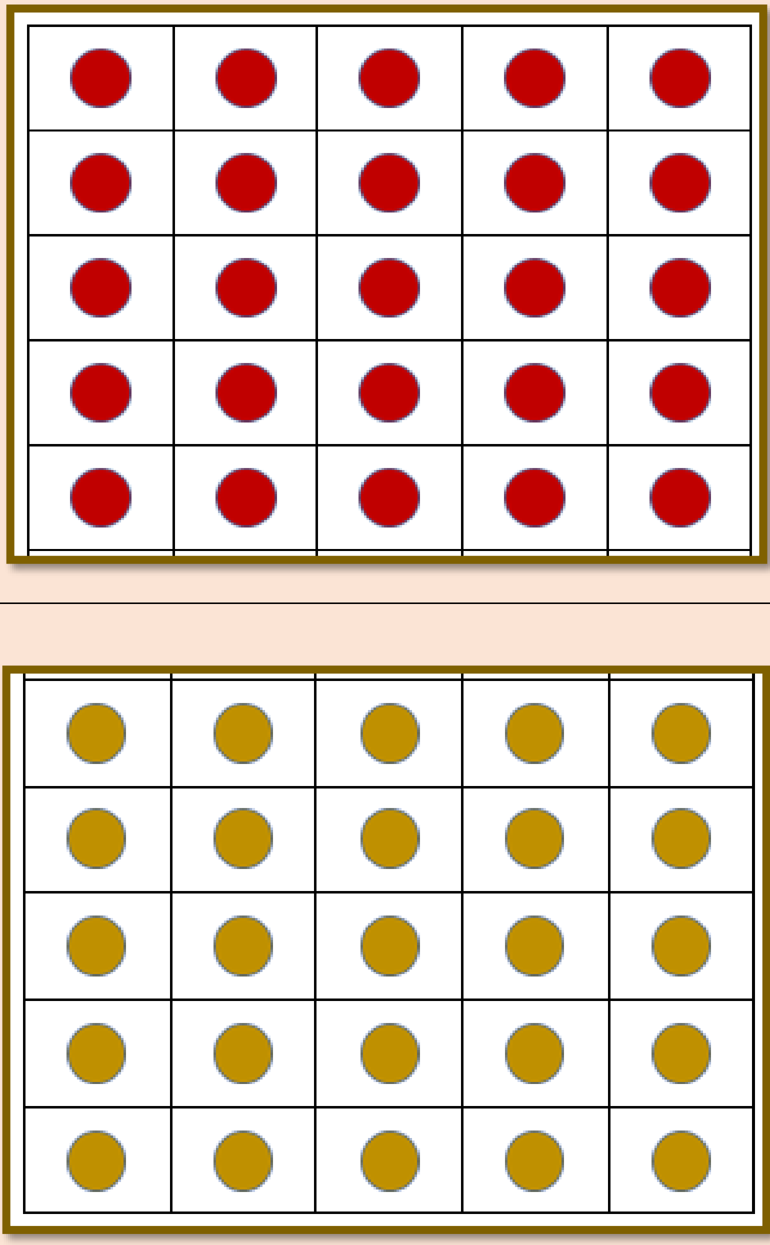
- **Material**: um tabuleiro constituído por 36 casas, 49 pontos; dois dados, sendo que, cada valor do primeiro dado representa |a|, e cada valor do segundo dado representa |b|; contém 50 fichas no formato de círculos ou botões, sendo 25 de cada cor.
- **Nº de jogadores**: duplas ou equipes.
- **Regras**: joga-se um dado de cada vez, e o valor apresentado no 1º dado é chamado de |a|, o segundo, é chamado de |b|; em seguida, verifica-se os valores voltados para cima, se: 1. $|a| < |b|$, coloca-se duas fichas no tabuleiro; 2. $|a| > |b|$, coloca-se três fichas no tabuleiro; 3. $|a| = |b|$, coloca-se uma ficha no tabuleiro. Para isso, é necessário ficar atento aos números que aparecem nas faces dos dois dados. A resposta indica o percurso que deverá seguir. Quem conseguir formar quatro "V" primeiro, ganha o jogo. Para formar o "V", as fichas ou botões podem ser movidos na horizontal, vertical e na diagonal. Por exemplo: $|a| < |b| \rightarrow |1| < |6|$. Destacamos que, as perguntas podem variar de acordo com o nível de conhecimento dos discentes. Lembrando ainda que essa estratégia pode ser ampliada para todo o conteúdo de Função Modular, com o intuito de ampliar novas abordagens e conhecimentos.
- **Objetivo**: Trabalhar conceitos básicos de módulo, raciocínio lógico dedutivo, respeito mútuo e compartilhamento de saberes.

Para tal contexto, apresentamos na figura 21, o modelo da atividade lúdica.

Figura 21 – Atividade lúdica 2



Tabuleiro e dados modificados

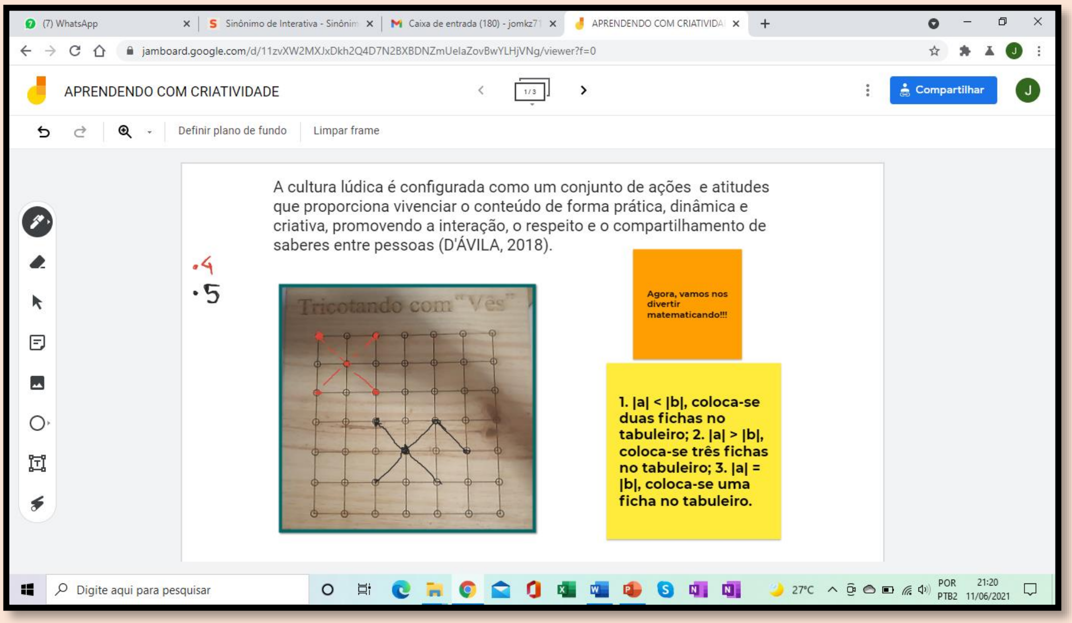


Modelos das fichas

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Para compor a dinamização das atividades, utilizamos a ferramenta digital Jamboard, pois é um quadro inteligente do Google que serve para trabalhar vários tipos de informações, construções e o compartilhamento de ideias, de forma participativa e criativa, por meio da escrita, leitura, desenho e gravuras, possibilitando que grupos de pessoas interajam entre si, auxiliando no processo de conhecimento coletivo. Na figura 22, expomos o quadro interativo Jamboard, ressaltando a participação e integração entre estudantes na realização da atividade.

Figura 22 – Atividade realizada pelos estudantes no quadro interativo Jamboard



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

A função desse tipo de atividade é estimular a aprendizagem e o protagonismo juvenil, tendo em vista várias estratégias de ensino, desenvolvidas a partir da dinamicidade e da integração entre saberes, dialogando com o conhecimento vivenciados pelo estudante, tanto na sala de aula quanto no meio onde estão inseridos.

7º passo: Encerramento do encontro

Concluímos o encontro, ressaltando a importância da participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem, onde entendemos que a interação constrói saberes e expressa diferentes visões de mundo, levando em consideração a reflexão crítica de cada sujeito. Assim, registramos os comentários dos estudantes, os quais subsidiaram-nos para novas discussões.

5º ENCONTRO: DESFECHO DA SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES NUMA PERCEPÇÃO DIALÓGICA E INVESTIGATIVA

> *"Ingressar no significado é aprender a produzir significados, relacionando-se como sujeitos ativos por meio dos significados narrativos, transformando o mundo que os rodeia" (BRUNER, 1997, p. 66).*

- **TEMPO**: 2 horas

- **AÇÕES DESENVOLVIDAS:**

Nesse episódio, dialogamos sobre o processo de investigação na sala de aula e os efeitos positivos para o desenvolvimento intelectual e humano. Resultando assim, numa forma de narrar, integrar, respeitar e de aprender diferentes formas de culturas.

1º PASSO: FINALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

Realizamos uma avaliação para averiguar os benefícios da estratégia pedagógica aplicada no estudo de Funções e as implicações contextuais para aquisição de novos conhecimentos, à luz da investigação por descoberta no processo de ensino e aprendizagem matemática.

Para a verificação foram pontuados os seguintes tópicos: participação nas atividades, materiais lúdicos, ferramentas digitais, linguagem, integração e cooperatividade. Elaboramos um questionário aberto e disponibilizamos um link de acesso, direcionando os estudantes ao Google Formulário. A devolutiva nos forneceu subsídios para o aprimoramento da prática pedagógica e a concretização da sequência de ensino como um processo dialógico, participativo, socializador e interativo no tratamento das temáticas com significados.

2º PASSO: AGRADECIMENTOS E MENÇÃO HONROSA

Para este momento, organizamo-nos da seguinte forma:

- Entrega de uma placa de agradecimento e participação aos estudantes;
- Recebimento do selo 2ºCPM-CHMJ (são selos criados pelo Comando do Colégio Militar para incentivar a participação dos estudantes em eventos, aulas, minicursos, trabalhos científicos e culturais). Vale dizer que estes selos são postados na pasta curricular do estudante.
- Prêmio de criatividade: Torre de Hanói (um jogo de estratégia, memória, planejamento, ação e resolução).

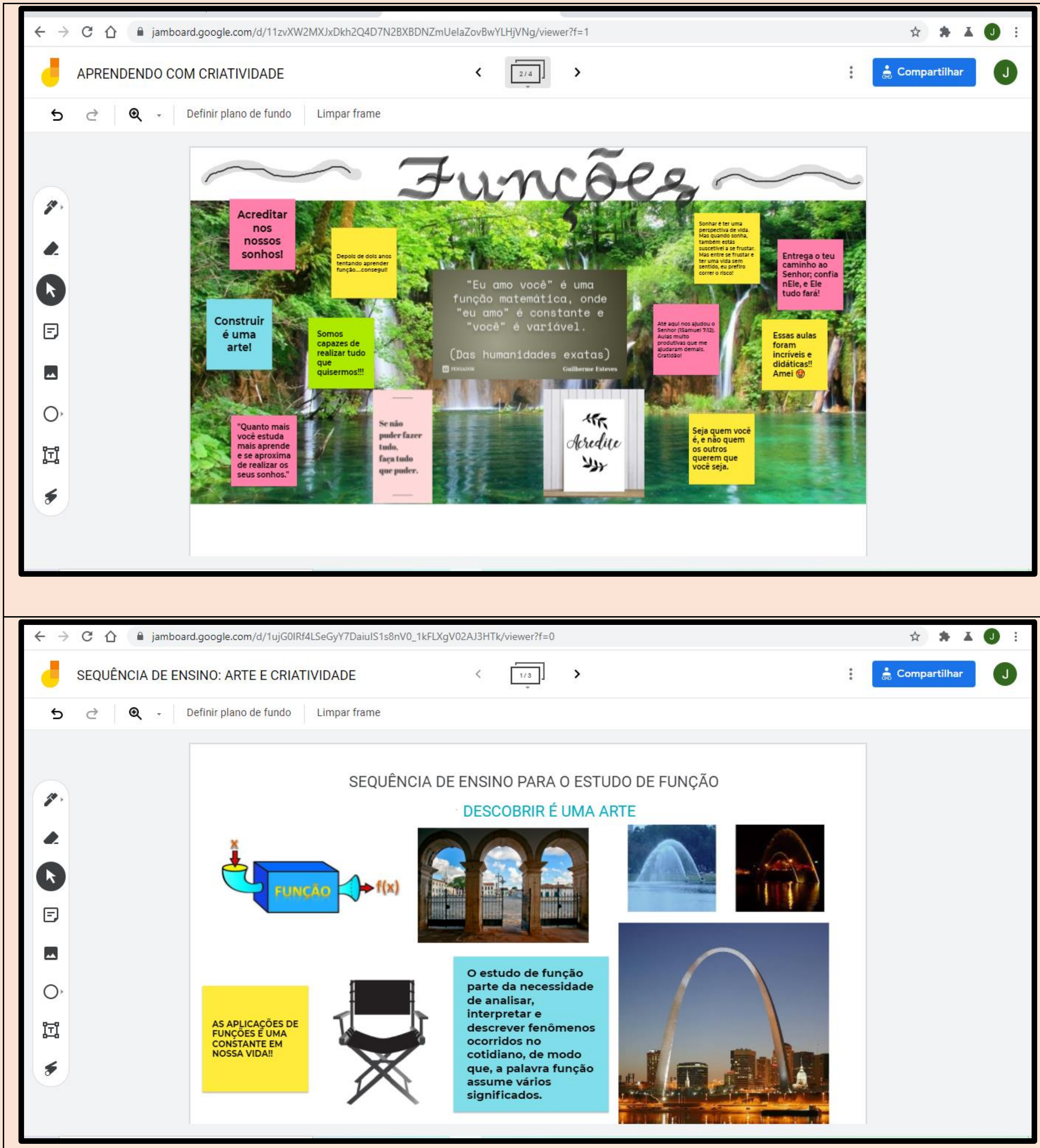
No quadro 13, expomos os mimos entregues aos estudantes.

Quadro 13 – Mimos presenteados aos discentes

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Pedimos aos discentes que fizessem seus comentários e deixassem suas contribuições escrevendo no quadro interativo Jamboard. Desse modo, exibimos no quadro 14, as considerações dos estudantes acerca de Funções, às quais denominamos de atividade lúdica 3.

Quadro 14 – Atividade lúdica 3: interação e criatividade



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Concernente as construções e percepções dos estudantes, as suas ações e reflexões são protagonizadas a partir do processo de conhecimento e reconhecimento do cotidiano. Assim, as ideias matemáticas vão surgindo mediante o diálogo investigativo e coletivo, favorecendo a produção contínua e evolutiva de novos conhecimentos. Na visão de Bruner (2008, p. 127), "[...] A ação pode ser determinada pelo que o homem sabe

[...]", e que, "[...] pode ser entendida em termos de princípios seletivos por meio dos quais utilizamos o conhecimento disponível". O autor (p. 127) sublinha que:

> O homem não responde a um mundo que existe por meio do toque direto. Em vez disso, ele representa o mundo por si e age em favor de ou em reação a suas representações. As representações são produtos de nosso próprio espírito na medida em que são formadas pela vivência em sociedade com a linguagem, mitos, histórico e formas de fazer as coisas.

Comentário:

Assim, ressaltamos a importância do processo investigativo para o desenvolvimento de habilidades, compreensão e resolução de problemas matemáticos; relação da matemática com o cotidiano; uso da linguagem para o entendimento dos contextos apresentados na matemática; a interação entre sujeito e objeto de estudo; construção do conhecimento cotidiano, escolar e científico; o respeito à diversidade cultural; elaboração de estratégias pedagógicas para estimular o processo de aprendizagem; incentivo à criatividade, curiosidade e à descoberta. São componentes que integram a relação ensino e aprendizagem com significados a partir da elaboração de diferentes tipos de atividades, evidenciando tanto a teoria quanto a prática.

2º passo: Encerramento das atividades

Reiteramos a relevância do currículo em espiral para o processo de ensino e aprendizagem, por oportunizar aos estudantes vivenciarem diversas formas de aprendizagens, além de proporcionar uma revisitação aos conteúdos já vistos, sempre que necessário, para aquisição de novas estruturas de conhecimento. Afinal, Bruner menciona que qualquer conteúdo pode ser ensinado a um estudante desde que se respeite as suas fases cognitivas.

Desse modo, as ações desenvolvidas originaram-se na sequência de ensino para o estudo de Funções, percorrendo caminhos investigativos com diferentes significados para o processo de aprendizagem.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de ensino para o estudo de Funções discorre nas experiências e aprendizagens apresentadas neste trabalho, servindo de suporte para melhorar e aperfeiçoar a prática pedagógica, trazendo contribuições relevantes na elaboração de novas estratégias de ensino para o processo de conhecimento, e levando em consideração a criatividade, curiosidade e o processo investigativo numa abordagem por descoberta.

A sequência de ensino trabalhada com os estudantes refletiu positivamente no aprendizado, trazendo satisfação, embelezamento, harmonização com o pensamento matemático, promovendo a criatividade, abrindo caminhos para a investigação e descoberta coletiva num enfoque dialógico. Assim, a integração, motivação, curiosidade e compartilhamento de conhecimentos, traçaram caminhos de construção, pensamentos, reflexões e ações para recapitulação e elaboração de novos saberes.

Os encontros encantaram aos estudantes, porque tratamos o conteúdo de forma leve, dinâmica e participativa, tendo-os como protagonistas, respeitando suas experiências, vivências, cultura, conhecimentos e o ponto de vista individual e coletivo. Cada encontro tinha a função de trabalhar algum contexto do cotidiano, permitindo que, os educandos interagissem com o meio em que estão inseridos e o contexto em estudo.

Assim, a participação dos estudantes foi de suma importância para o desenvolvimento da sequência de ensino, pois deram brilho e vida a cada encontro, fomentando as qualidades de um trabalho de natureza participativa e dialógica.

Por fim, a estratégia aplicada nos encontros para o Estudo de Função, requisitou uma mudança na estruturação e abordagem do conteúdo, por meio da exploração de problemas do cotidiano, permitindo criar novas formas de conhecimentos e transformar os discursos da sala de aula numa realidade conhecida e vivida pelo estudante, assim, podendo inserir novos conhecimentos, com vista no estágio cognitivo e intelectual de cada educando, adequando a linguagem às diferentes formas e fontes de informação. Daí, vimos claramente, a relevante abertura do diálogo em sala de aula para trabalhar a conexão da Matemática com o meio em que os estudantes estão inseridos, levando em consideração os aspectos sociais e culturais.

Desse modo, acreditamos que, a partir dessa sequência de ensino, podemos estimular outros protagonistas a construírem novas sequências, abordando outros tipos de funções ou acrescentando ideias para as mencionadas, com a finalidade de corroborar com o processo de ensino e aprendizagem no campo da matemática, estruturando-a a partir do currículo em espiral e o ensino por descoberta, redesenhando o estudo de Funções e o espaço da sala de aula, com estratégias que instiguem e promovam o ensino com significado. Portanto, as estratégias de ensino podem ser ampliadas e enriquecedoras, trazendo para sala de aula diferentes formas de conhecimentos, em que professores e estudantes interajam e protagonizem a conjunção de novos saberes.

REFERÊNCIAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ALMEIDA, Helber Rangel Formiga Leite de; GRACIAS, Telma Aparecida de Souza. **Pesquisa em ensino e sala de aula : Diferentes vozes em uma investigação**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

BRASIL. Ministério da Educação**. A Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRUNER, Jerome S **O Processo da Educação**. Tradução Maria do Carmo Romão. Lisboa, Portugal: Edições 70, 2015.

BRUNER, Jerome S **Sobre a Teoria da Instrução.** São Paulo: Ph Editora Ltda., 2006.

BRUNER, Jerome S **Sobre o conhecimento:** ensaios da mão esquerda. São Paulo : Phorte, 2008.

BRUNER, Jerome S. **Atos de Significação**. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

BRUNER, Jerome S. **Para Uma Teoria da Educação.** Sine lócus: Rolo & filhos, Artes Gráficas, Ltda, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

D'ÁVILLA, Cristina; FORTUNA, Tânia Ramos (org.). **Ludicidade, cultura lúdica e formação de professores**. Curitiba: CRV, 2018.

FREIRE, Paulo. **A importância do ato de ler**: em três artigos que se completam. 51. ed. São Paulo: Cortez, 2011. (Coleção questões da nossa época; v. 22)

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura)

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido.** Rio de Janeiro, RJ: Paz e Terra, 2005.

KOTHE, Flávio R. **A Alegoria**. São Paulo: Editora Ática, 1986. (Série Princípios)

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LORENZATO, Sergio (org.). **O laboratório de ensino da Matemática na formação de professores.** 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2010. (Coleção formação de professores)

MACHADO, Nílson José. **Matemática e educação**: alegorias, tecnologias, jogos, poesia. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2012. (Coleção questões da nossa época; v. 43)

MIZUKAMI, Maria das Graças Nicoletti. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: E.P.U., 2019.

MOREIRA, Marcos Antonio. **Aprendizagem Significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência Didática Interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

PIMENTA, Selma Garrido; FRANCO, Maria Amélia Santoro (orgs.). **Pesquisa em educação**: possibilidades investigativas/ formativas da pesquisa-ação. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2014.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

SKOVSMOVES, Ole. **Um convite à educação Matemática crítica.** Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo. Campinas: Papirus, 2014. (Perspectivas em Educação Matemática)

STEWART, Ian. **Os mistérios do professor Stewart**: resolvidos por Hemlock Soames e o Dr. Watsup. Tradução George Schlesinger. Rio de Janeiro, 2015.

TORRE, Saturnino de la. **Dialogando com a criatividade**. Tradutora Cristina Mendes Rodríguez. São Paulo: Madras, 2005.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.